

<https://doi.org/10.15407/fmmit2026.42.085>

## Алгоритмічно-програмне забезпечення для параметричної оптимізації руху порталного робота

Мирослав Демидюк<sup>1,2</sup>, Богдан Проць<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Доктор технічних наук, старший науковий співробітник, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів, вул. Наукова, 3-Б, 79060, Україна, e-mail: m\_demydyuk@ukr.net

<sup>2</sup> Доктор технічних наук, старший науковий співробітник, Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, вул. Університетська, 1, 79000, Україна

<sup>3</sup> Аспірант, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна, e-mail: Bohdan.Prots@lnu.edu.ua

*Описано алгоритм та програмний застосунок для параметричної оптимізації законів руху порталного робота з дволанковим маніпулятором. Робот під дією керувань (активних сил та моментів) здійснює плоскопаралельний рух у вертикальній площині, де виконує транспортну операцію з переміщення вантажу із заданого початкового стану в заданий кінцевий. Сформульована задача пошуку оптимальних керувань, які забезпечують виконання транспортної операції з мінімізацією заданого функціонала. Побудовано алгоритм наближеного розв'язання задачі, який ґрунтується на параметризації кожної узагальненої координати механічної системи сумою кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду з невідомими коефіцієнтами. Коефіцієнти полінома визначено з граничних умов транспортної операції, коефіцієнти тригонометричних рядів – як розв'язок відповідної задачі нелінійного програмування. Алгоритм реалізовано у вигляді програмного застосунку, з допомогою якого проведено серію розрахунків. Результати числового моделювання підтвердили ефективність методу параметричної оптимізації в задачах оптимального керування рухом досліджуваного порталного робота.*

*Ключові слова: порталний робот, дволанковий маніпулятор, оптимальне керування, параметризація законів руху, нелінійне програмування, програмний застосунок*

**Вступ.** Важливим елементом великогабаритних автоматизованих складських комплексів є маніпуляційні роботи порталного типу (рис. 1). Конструктивні особливості таких систем – висока жорсткість опорної рами та верхнє базування робочого органу – забезпечують їм суттєві переваги над традиційними маніпуляційними системами за критеріями вантажності та раціональності використання виробничих площ.

Основним функціональним призначенням порталних роботів є виконання транспортних операцій із переміщення об'єктів (вантажів) між заданими просторовими позиціями. При цьому, якщо координати початкового та кінцевого положень визначаються технологічним завданням, характеристики руху між ними залишаються вільними параметрами й можуть бути встановлені з урахуванням до-

даткових вимог, зокрема умови мінімізації обраного критерію якості руху. Ефективним тут є використання засобів математичного моделювання, теорії оптимізації та новітніх інформаційних технологій. Тому дослідження задач оптимізації законів руху порталних роботів, побудова відповідних алгоритмів та програмного забезпечення є актуальними задачами робототехніки. У цьому контексті варто підкреслити, що практична значущість розробленого алгоритму оптимізації руху порталного робота визначається насамперед повнотою його програмної реалізації. Для повноцінного дослідження динаміки порталного робота недостатньо обмежитися числовими значеннями параметрів оптимізації і мінімальним значенням відповідного критерія. Не менш суттєвою є можливість відстежити зміну конфігурації робота в часі (кінограма руху), проаналізувати траєкторію руху захоплювача, оцінити характер зміни узагальнених координат, швидкостей та відповідних керувань. Водночас важливим є також представлення та збереження результатів розрахунків. Побудова відповідних графічних і табличних форм подання результатів обчислень істотно розширює можливості програмного продукту, зокрема, вона дає можливість досліджувати чутливість порталного робота (у межах побудованої моделі) до варіації параметрів конструкції. Відповідно на рівні програмної реалізації постають не менш важливі питання вибору архітектури програмного застосунку, організації обчислювального процесу, забезпечення точності чисельних процедур та збіжності відповідних ітераційних процесів, зручності інтерпретації отриманих даних. Тобто, програмна реалізація в цьому випадку не є допоміжним етапом дослідження, а становить його невіддільну частину, що забезпечує перехід від математичної моделі до практичного інструменту числового аналізу.

Задачі оптимізації маніпуляційних роботів у різноманітних формулюваннях досліджувались у низці праць, зокрема, [1–8]. В оглядовій статті [1] систематизовано проблематику планування та оптимізації руху роботизованих маніпуляційних систем. Тут розглянуто класичні аналітичні методи, чисельні алгоритми оптимізації, евристичні підходи та сучасні інтелектуальні методи. Основну увагу приділено критеріям оптимальності, серед яких мінімізація часу руху, енергетичних витрат, похибки позиціонування та забезпечення плавності траєкторії. Праці [2, 3] присвячені кінематичному аналізу та оптимізації порталних роботів. У [2] досліджено особливості кінематичної схеми багатокоординатної порталної системи, сформульовано задачу оберненої кінематики та розглянуто підходи до вибору раціональної конфігурації руху. Важливі результати щодо організації руху подвійних порталних систем наведено у праці [3]. Тут використано параметризацію траєкторії за допомогою В-сплайнів, де враховано часові профілі руху, що забезпечує формування плавних, кінематично допустимих траєкторій.



Рис. 1. Промисловий порталний робот

У праці [4] виконано динамічний аналіз дволанкового маніпулятора та розглянуто підходи до синтезу керування його рухом. Автори побудували математичну модель системи на основі рівнянь Лагранжа, в якій врахували масоінерційні характеристики ланок та дослідили зв'язок між узагальненими координатами, швидкостями, прискореннями та керуваннями.

У монографії [5] розглянули низку задач оптимального (за швидкодією) керування дволанковим маніпулятором. Зокрема, тут запропонували числову процедуру побудови субоптимального за швидкодією режиму керування у параметричному класі кусково-сталих функцій. Чисельно побудовано діаграми, із яких можна визначити параметри керування: кількість точок перемикаць, порядок чергування знаків, моменти часу перемикаць та час швидкодії. У статті [6] дослідили рух дволанкового маніпулятора, який під дією активних та пасивних (пружинно-демпферних) приводів виконує циклічну транспортну операцію у вертикальній площині. Методом параметричної оптимізації з використанням тригонометричних рядів побудовано субоптимальний розв'язок задачі сукупної оптимізації параметрів пасивних приводів та законів руху маніпулятора. Метод параметричної оптимізації використали також у працях [7, 8] для моделювання динаміки дев'ятиланкової системи, що описує ходу двоногого робота та ходу людини з гомілковостопним шарнірним ортезом.

У сучасних дослідженнях робототехнічних маніпуляційних систем поруч з математичними моделями та чисельними методами важливу роль відіграють програмні засоби. Саме в межах таких програмних середовищ реалізуються алгоритми кінематики та динаміки, виконується симуляція руху, перевіряється коректність побудованих режимів керування та здійснюється аналіз отриманих числових результатів. Програмний продукт у робототехніці розглядається не лише як допоміжний обчислювальний модуль, а як інструмент для комплексного чисельного експерименту.

Наведемо окремі публікації, присвячені розробленню та використанню програмних засобів у задачах сучасної робототехніки. У статті [9] подано огляд програмних симуляторів, що застосовуються під час розв'язання різносторонніх задач робототехніки. Автори аналізують програмні середовища, які використовуються для моделювання фізичної взаємодії, тестування алгоритмів керування та віртуальної перевірки поведінки роботів у різних умовах. У праці [10] описано відкрите програмне середовище Gazebo для симуляції робототехнічних систем. Ця стаття демонструє підхід, за якого програмна платформа поєднує математичну модель, фізичну симуляцію та візуальний аналіз.

Окремий напрям становлять спеціалізовані бібліотеки для розрахунку динаміки роботів. У праці [11] представлено бібліотеку Pinocchio, орієнтовану на ефективну реалізацію алгоритмів динаміки систем твердих тіл. На відміну від універсальних симуляторів, тут зроблено акцент саме на високопродуктивній алгоритмічній реалізації динамічних обчислень. Ця праця є показовою, оскільки підкреслює важливість спеціалізованого програмного інструментарію для побудови точних та ефективних обчислювальних схем.

У запропонованій статті описано модель, алгоритм та програмний застосунок для параметричної оптимізації руху портального робота з дволанковим маніпулятором. Каретка робота поступально переміщається вздовж горизонтальної балки, встановленої на вертикальних колонах. До каретки за допомогою шарнірного механізму (з вертикальною та горизонтальною осями) прикріплено дволанковий маніпулятор. Робот впродовж заданого часу виконує плоскопаралельний рух у вертикальній площині, переміщаючи вантаж із заданого початкового стану у заданий кінцевий стан. Сформульовано задачу пошуку оптимальних керувань (сила, прикладена до каретки, та моменти сил у шарнірах маніпулятора), які забезпечують виконання транспортної операції з мінімізацією заданого критерія якості руху (квадратичного за керуваннями функціонала). Побудовано алгоритм наближеного розв'язання задачі, який ґрунтується на параметризації узагальнених координат робота лінійною комбінацією заданих функцій (з невідомими коефіцієнтами). Такий підхід дає змогу звести вихідну задачу оптимального керування до задачі нелінійного програмування. Алгоритм реалізовано у вигляді відповідного програмного застосунку, з допомогою якого проведено низку розрахунків. Отримані результати підтвердили ефективність розроблених алгоритму та програмного застосунку.

Метою дослідження є побудова алгоритму та програмного застосунку для параметричної оптимізації руху портального робота з дволанковим маніпулятором. Дослідження є подальшим розвитком методу параметричної оптимізації у задачах оптимального керування нелінійними механічними системами [6–8].

## 1. Модель маніпулятора та алгоритм побудови субоптимального керування

Розглядаємо портальний робот, що виконує плоскопаралельний рух у вертикальній площині  $OXY$  (рис.2). Основними елементами робота є каретка  $G_0$  та дволанковий маніпулятор (з ланками  $G_1, G_2$ ). Каретка  $G_0$  під дією сили  $F$  поступально переміщається вздовж горизонтальної балки  $l$ , встановленої на вертикальних колонах 2 і 3. Колони своїми нижніми кінцями закріплені на нерухомій основі. Переміщення каретки реалізується за допомогою зубчато-рейкової передачі, яка перетворює обертальний рух ротора привода каретки у її поступальний рух. Зубчата рейка жорстко закріплена на траверсі. До каретки за допомогою циліндричного шарніра  $O_1$  приєднано дволанковий маніпулятор, ланки якого з'єднані між собою циліндричним шарніром  $O_2$ . Осі шарнірів  $O_1, O_2$  ортогональні до площини  $OXY$ . На кінці ланки  $G_2$  розміщено захоплювач (з вантажем). Поворот ланок  $G_1$  і  $G_2$  відносно осей шарнірів  $O_1$  і  $O_2$  відбувається під дією моментів сил  $u_1$  і  $u_2$  відповідно.

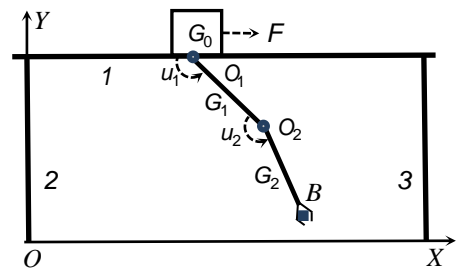


Рис. 2. Кінематична схема робота

Загалом керований рух досліджуваного робота реалізується внаслідок взаємодії керувань  $F$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  та сили тяжіння. Зауважимо, що керування  $F$  є результатом взаємодії між зубами шестерні привода каретки та направляючої рейки (реакція опори рейки). Електропривід каретки генерує електромагнітний момент, який є внутрішнім фактором системи, але оскільки рейка закріплена на нерухомій траверсі, виникає зовнішня сила тяги  $F$ . Надалі тертям рухомих частин робота нехтуємо. Також знехтуємо розмірами захоплювача з вантажем, вважаючи, що їхня маса зосереджена в точці  $B$ .

Введемо узагальнені координати робота:  $x(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  – відстань від шарніра  $O_1$  до осі  $OY$  та кути відхилення ланок  $G_1$ ,  $G_2$  від вертикалі. Позначимо параметри:  $m_0$  – маса каретки  $G_0$ ;  $a$ ,  $b$  – довжини ланок  $G_1$ ,  $G_2$  відповідно ( $a = |O_1O_2|$ ,  $b = |O_2B|$ );  $m_i, c_i, J_i$  – маса ланки  $G_i$ , віддаль від її центра маси до осі шарніра  $O_i$  та її момент інерції відносно осі шарніра  $O_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $m_3$  – маса захоплювача (з вантажем). Тоді рівняння руху портального робота можна подати у вигляді такої системи нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + C_1(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) + C_2(\ddot{\beta}\cos\beta - \dot{\beta}^2\sin\beta) &= F, \\ J_a\ddot{\alpha} + C_1(\ddot{x}\cos\alpha + g\sin\alpha) + aC_2[\ddot{\beta}\cos(\alpha - \beta) + \dot{\beta}^2\sin(\alpha - \beta)] &= u_1 - u_2, \\ J_b\ddot{\beta} + C_2(\ddot{x}\cos\beta + g\sin\beta) + aC_2[\ddot{\alpha}\cos(\alpha - \beta) - \dot{\alpha}^2\sin(\alpha - \beta)] &= u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $M = \sum_{k=0}^3 m_k$  – сумарна маса всієї системи,  $g$  – прискорення сили тяжіння;  $C_1 = m_1c_1 + a(m_2 + m_3)$ ,  $C_2 = m_2c_2 + bm_3$ ,  $J_a = J_1 + a^2(m_2 + m_3)$ ,  $J_b = J_2 + b^2m_3$ . Крапкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом  $t$ . Співвідношення (1) є рівняннями Лагранжа другого роду, які описують рух портального робота під дією керувань  $F(t)$ ,  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  [5].

Однією з ключових технологічних операцій портального робота є транспортування об'єктів між фіксованими точками робочого простору. Зазвичай цільові координати операції визначають в інерціальній системі відліку. Проте під час моделювання динаміки робота це зумовлює необхідність розв'язання прямої задачі кінематики, що може створити додаткові труднощі. Нижче транспортну операцію робота задаємо в термінах його узагальнених координат:

$$\begin{aligned} x(0) = x_0, \alpha(0) = \alpha_0, \beta(0) = \beta_0, \dot{x}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) &= 0, \\ x(T) = x_T, \alpha(T) = \alpha_T, \beta(T) = \beta_T, \dot{x}(T) = \dot{\alpha}(T) = \dot{\beta}(T) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $T$ ,  $(x_\tau, \alpha_\tau, \beta_\tau)|_{\tau=0, T}$  – задані сталі параметри транспортної операції. Тут вважаємо, що на початку  $t = 0$  та в кінці руху  $t = T$  механічна система перебуває у стані спокою. Сформулюємо таку задачу оптимального керування.

**Задача 1.** Визначити оптимальні керування  $F^*(t)$ ,  $u_1^*(t)$ ,  $u_2^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , які забезпечать виконання маніпулятором транспортної операції (2) з мінімальним значенням функціонала

$$E = \int_0^T [F^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt. \quad (3)$$

Квадратичний функціонал типу (3) часто використовують у задачах оптимізації робототехнічних систем. Використання квадратичної залежності функціонала  $E[F, u_1, u_2]$  від керувань дозволяє регуляризувати задачу, забезпечуючи відповідну гладкість керувань. Незважаючи на нелінійний характер динаміки, квадратична форма функціоналу сприяє покращенню збіжності чисельних методів. Крім того, такий підхід дозволяє, певною мірою, зменшити інтенсивність керування, запобігаючи виникненню їх надмірних амплітудних значень.

З огляду на нелінійність рівнянь руху портального робота та взаємозалежність між його узагальненими координатами використаємо для побудови субоптимального розв'язку задачі 1 метод параметричної оптимізації [6]. Згідно із цим методом подамо узагальнені координати механічної системи у вигляді суми кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду

$$q_i = \sum_{k=0}^3 p_{ik} t^k + \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_{ik} \sin k \frac{2\pi}{T} t), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

де позначено:  $q_1 = x(t)$ ,  $q_2 = \alpha(t)$ ,  $q_3 = \beta(t)$ ;  $n$  – заданий параметр. Коефіцієнти полінома  $\{p_{ik}\}_{k=0}^3$  визначаємо в явному вигляді з умов транспортної операції (2):

$$p_{i0} = q_{i0} - \sum_{k=1}^n a_{ik}, \quad p_{i1} = -\omega \sum_{k=1}^n k b_{ik}, \quad p_{i2} = \frac{3}{T^2} (q_{i1} - q_{i0} - T p_{i1}), \quad p_{i3} = -\frac{2}{3T} p_{i2},$$

де  $q_{i0} = q_i(0)$ ,  $q_{i1} = q_i(T)$ . Коефіцієнти параметризації  $\mathbf{z} = (a_{ik}; k = \overline{1, n}, i = \overline{1, 3})$  знаходимо у вигляді розв'язку задачі нелінійного програмування:

$$\tilde{E}(\mathbf{z}) \xrightarrow{\mathbf{z}} \min, \quad (5)$$

де  $\tilde{E}(\mathbf{z})$  – функція вектора параметрів  $\mathbf{z}$ , яку отримуємо в результаті підставлення параметризованих узагальнених координат (4) у рівняння динаміки (1) та застосування методики обернених задач динаміки.

Для розрахунку динамічних характеристик портального робота використовуємо рівномірну сітку часового проміжку  $[0, T]$ . Одержану зведену задачу (5) розв'язуємо класичними методами багатовимірної чисельної мінімізації, зокрема, методом спряжених напрямків [12]. Перспективним тут видається також використання алгоритмів паралельних обчислень [13, 14].

## 2. Опис програмного застосунку для параметричної оптимізації

Описаний вище алгоритм реалізовано у вигляді програмного застосунку, призначеного для чисельного дослідження задачі параметричної оптимізації руху портального робота з дволанковим маніпулятором. Програму написано мовою Java з використанням бібліотеки Swing для побудови графічного інтерфейсу [15], що дало змогу об'єднати в одному програмному засобі обчислювальний модуль, введення та редагування параметрів моделі та візуалізацію руху.

Структура програми підпорядкована чисельній структурі задачі. На початковому етапі задаються масоінерційні параметри конструкції порталного робота, а також параметри транспортної операції. Далі виконується параметризація узагальнених координат, обчислюються швидкості та прискорення, визначаються (в параметризованому вигляді) відповідні керування та формується значення цільового функціонала (як функції багатьох змінних).

На рис. 3 наведено стартове вікно програми. Параметри згруповано у три секції: геометрія та маси, параметри транспортної операції та чисельні параметри. До першої секції належать довжини ланок, діаметри поперечного перерізу, густина матеріалу, маса каретки, маса захоплювача (з вантажем) і висота розташування горизонтальної балки. У другій секції задаються початкові та кінцеві значення узагальнених координат, а також тривалість руху. Третя секція містить кількість членів тригонометричного ряду параметризації (4), назву файлу збереження результатів і поле вибору методу оптимізації. Такий поділ є зручним для проведення серії чисельних експериментів із різними вхідними даними. У програмі також передбачено можливість скидання параметрів до значень за замовчуванням.

Основу обчислювальної частини становить гармонічна параметризація узагальнених координат порталного робота. Кожна з трьох координат  $x(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  подається у вигляді суми кубічного полінома та скінченого тригонометричного ряду з  $N$  гармоніками. Така параметризація автоматично забезпечує виконання граничних умов транспортної операції, що дає змогу зосередити оптимізацію на законі руху робота.

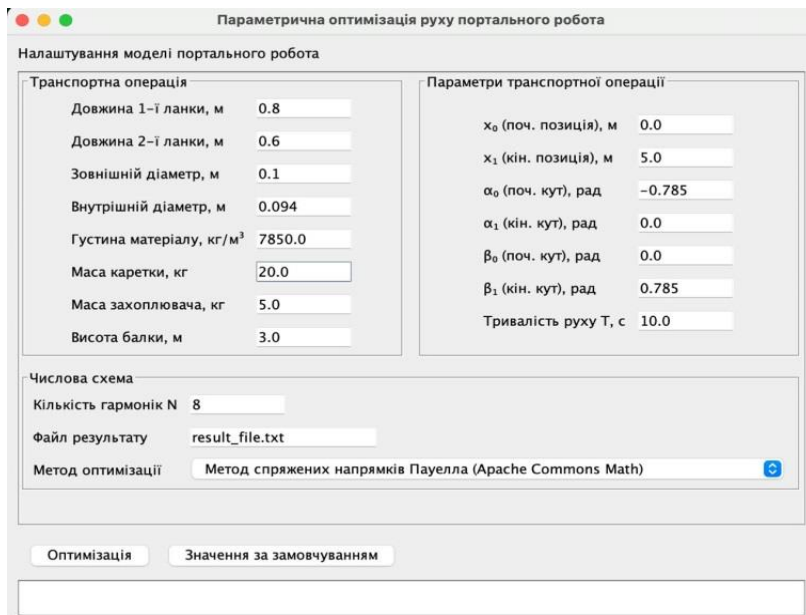


Рис. 3. Стартове вікно програми

При заданому наборі параметрів програма формує часові залежності узагальнених координат, обчислює їх перші та другі похідні, визначає керування та розраховує значення функціонала якості керування. Отже, процес мінімізації полягає у багаторазовому відтворенні руху системи для різних варіантів коефіцієнтів параметризації і подальшому порівнянні отриманих значень функціонала. Для числової мінімізації використано метод Пауелла (Powell's conjugate direction method), реалізований у класі PowellOptimizer бібліотеки Apache Commons Math 3.6.1[15]. Метод Пауелла будує послідовність спряжених напрямків і виконує мінімізацію, використовуючи лише значення цільової функції. Алгоритм оптимізації запускається після натискання кнопки "Оптимізація".

Окрім основного методу, у програмі передбачено можливість вибору методу покоординатного спуску, який виявився також продуктивним у задачах параметричної оптимізації маніпуляційних систем [6]. Під час кожного окремого запуску розрахунку використовується лише один із методів оптимізації, який користувач обирає в інтерфейсі програми.

Після завершення оптимізаційного процесу програмний застосунок відображає субоптимальні кінематичні та динамічні характеристики. На рис. 4 показаний момент руху портального робота (кінограма руху). Тут передбачена можливість покадрового перегляду, зупинки та повернення до початкових умов транспортної операції. У нижній частині вікна виводяться поточні координати вузлових точок маніпулятора O1, O2, B, а також миттєві значення узагальнених координат і керувань, що дозволяє відстежувати стан системи в кожний момент часу.

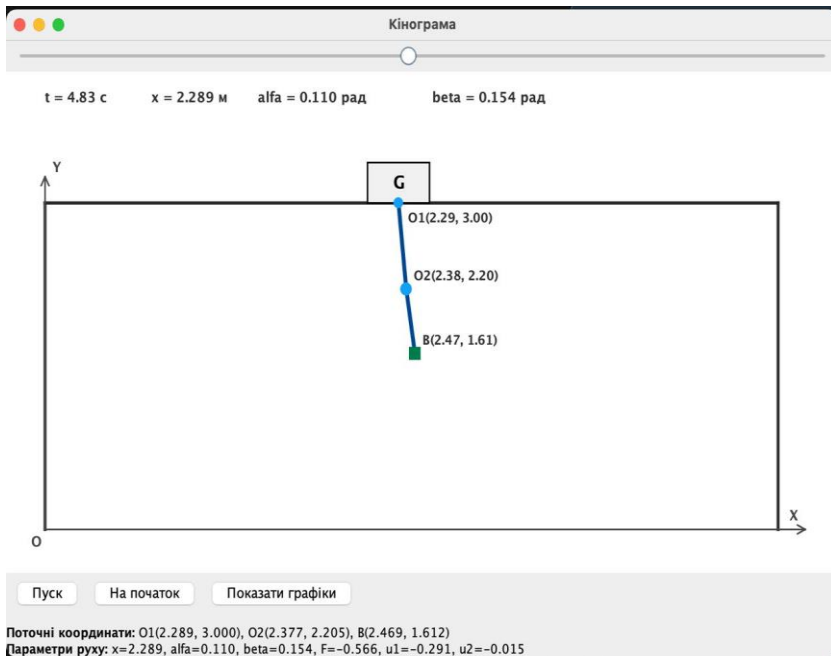


Рис. 4. Кінограма руху портального робота

Для аналізу результатів передбачено побудову шести типів графіків суб-оптимальних кінематичних і динамічних характеристик (рис. 5 – рис. 10): закон руху каретки  $x(t)$  та швидкість  $\dot{x}(t)$ ; кут повороту першої ланки  $\alpha(t)$  і кутова швидкість  $\dot{\alpha}(t)$ ; кут повороту другої ланки  $\beta(t)$  і кутова швидкість  $\dot{\beta}(t)$ ; керування  $F(t), u_1(t), u_2(t)$ ; траєкторія захоплювача  $B(xB, yB)$  на площині  $OXY$ . Графіки синхронізовані з кінограмою через спільний повзунок кадрів, що дає змогу одночасно спостерігати положення маніпулятора і відповідні значення характеристик. Це дозволяє оцінити не лише числову ефективність оптимізації, а й фізичний зміст отриманого розв'язку, зокрема, плавність руху, характер зміни керувань та узгодженість характеристик у часі.

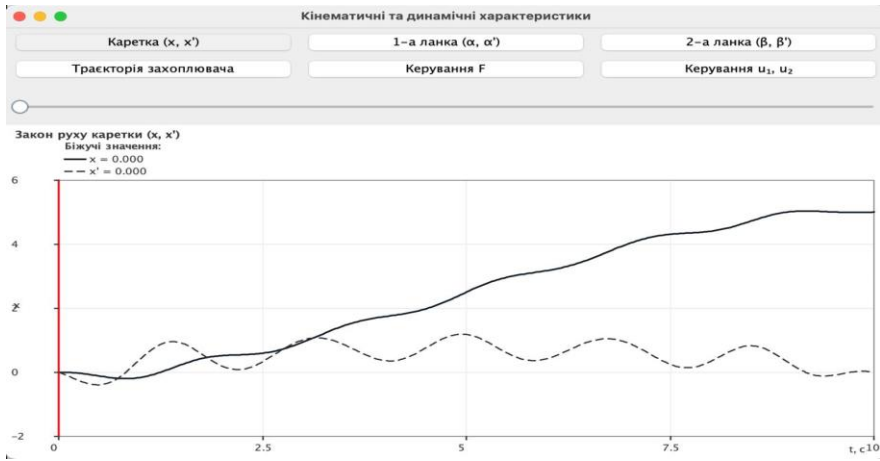


Рис. 5. Закон руху каретки

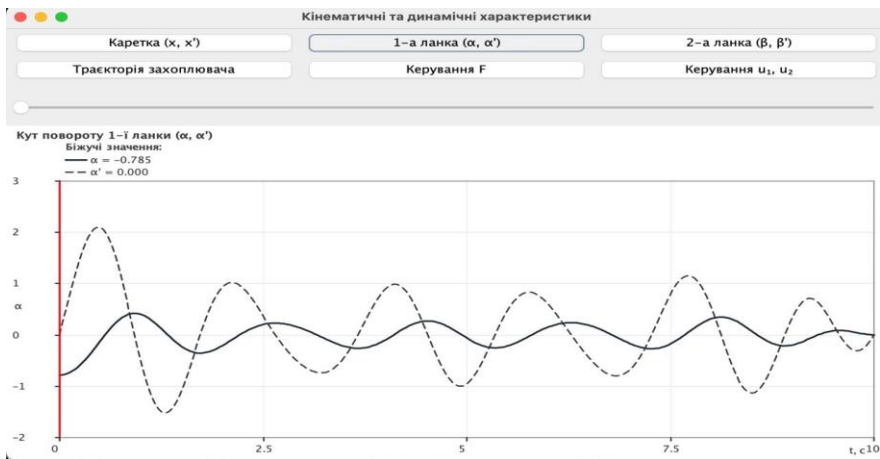


Рис. 6. Кут повороту першої ланки маніпулятора

Мирослав Демидюк, Богдан Проць  
Алгоритмічно-програмне забезпечення для параметричної оптимізації руху портального робота

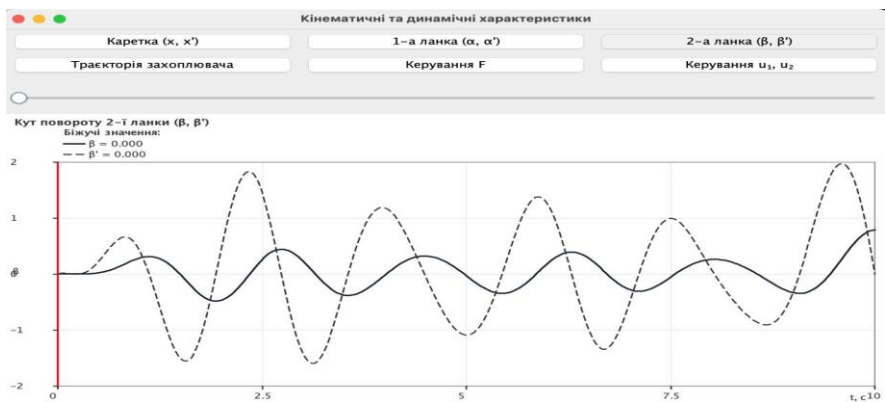


Рис. 7. Кут повороту другої ланки маніпулятора

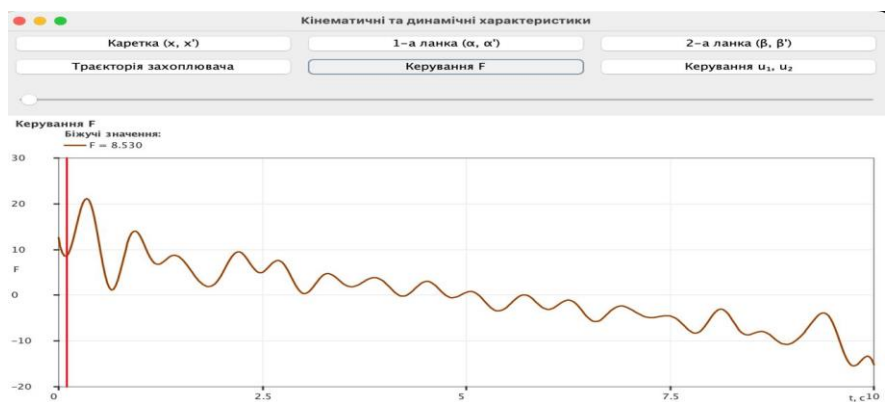


Рис. 8. Керування  $F(t)$

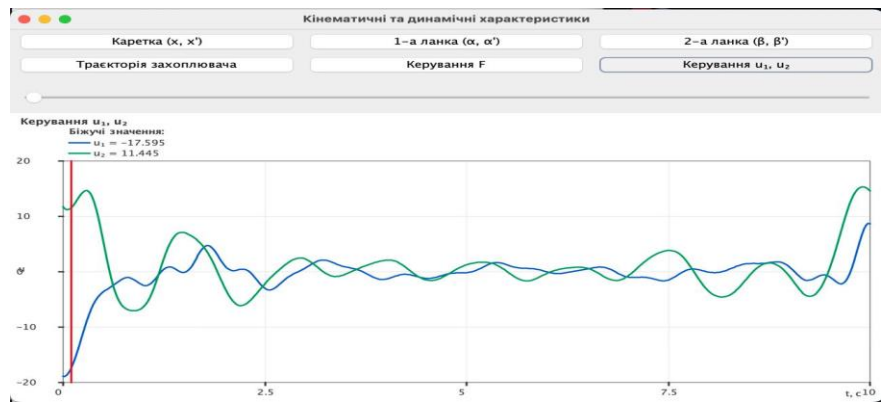


Рис. 9. Керування  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$

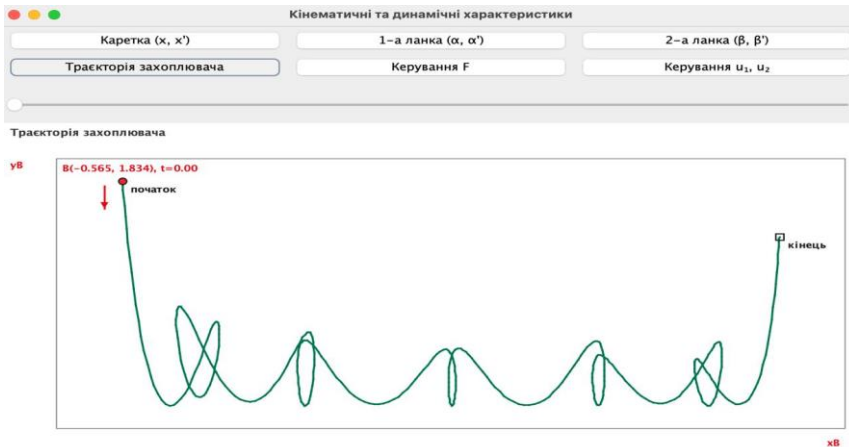


Рис. 10. Траєкторія руху захоплювача маніпулятора

Ефективність використаного параметричного підходу підтверджено результатами чисельного експерименту. Для кількості гармонік  $N = 8$ , що відповідає 48 параметрам оптимізації, час роботи алгоритму становив 17.3 с. Для початкового значення вектора  $\mathbf{z} = 0$  маємо  $\tilde{E}(\mathbf{z}) = 17678$ , після мінімізації отримали  $\tilde{E}(\mathbf{z}^*) = 981$ , тобто в процесі мінімізації значення  $\tilde{E}(\mathbf{z})$  було зменшено більш, ніж у 18 раз. Разом із мінімальним значенням функціонала програма формує оптимальний вектор параметрів  $\mathbf{z}^*$ , який визначає шуканий субоптимальний закон руху портального робота. Підсумкові числові результати, зокрема таблиця кінематичних та динамічних траєкторних, параметри оптимізації  $\mathbf{z}^*$ , значення  $\tilde{E}(\mathbf{z}^*)$  та час обчислень, зберігаються у текстовому файлі, що забезпечує відтворюваність результатів і зручність їх подальшого аналізу.

**Висновки.** Для портального робота з дволанковим маніпулятором, що виконує транспортну операцію у вертикальній площині, побудовано алгоритм наближеного розв'язання задачі оптимального керування з цільовим квадратичним (за керуваннями) функціоналом. Алгоритм ґрунтується на методі параметричної оптимізації у просторі узагальнених координат робота, що дає змогу звести вихідну задачу керування до задачі нелінійного програмування. Ефективність такого підходу підтверджено результатами числового моделювання. Алгоритм реалізовано у вигляді відповідного програмного застосунку, який поєднує математичну модель портального робота, параметричне подання його законів руху, процедуру мінімізації та засоби аналізу результатів. Разом із можливістю введення та редагування параметрів конструкції робота та характеристик транспортної операції, візуалізації руху (у вигляді кінограми та відповідних графіків), а також збереження отриманих даних у файл, це робить побудований застосунок продуктивним інструментом для дослідження субоптимальних режимів руху портального робота з дволанковим маніпулятором.

## **Література**

1. Romero S., Valero J., García A.V., Rodríguez C.F., Montes A.M., Marín C., Bolaños R., Álvarez-Martínez D. Trajectory Planning for Robotic Manipulators in Automated Palletizing: A Comprehensive Review // *Robotics*. – 2025. – Vol. 14, Is.55. – P. 1-23.
2. Xu J., Liu J., Jing X., Zhou H., Hu X., Ji J., Han Z. Kinematic analysis and optimisation of a gantry spraying robot for ship blocks // *Alexandria Engineering Journal*. – 2025. – Vol. 116. – P. 385-396.
3. Riboli M., Jaccard N., Silvestri M., Manconi E., Aimi A., Garziera R. Collision-free motion generation for dual-gantry robotic systems // *Robotics and Autonomous Systems*. – 2025. – Vol. 192. – P. 1-16.
4. Eissa A.M., El-Khatib M.F., El-Sebah M. Dynamics Analysis and Control of a Two-Link Manipulator // *WSEAS Transactions on Systems and Control*. – 2023. – Vol. 18. – P. 487-497.
5. Chernousko F.L., Bolotnik N.N., Gradetsky V.G. Manipulation Robots: Dynamics, Control, and Optimization. – CRC Press, 1993. – 288 p.
6. Демидюк М.В., Ширко М.І. Оптимізація режимів руху та параметрів дволанкового маніпулятора з активними і пасивними приводами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2007. – Т. 50, № 2. – С. 183-190.
7. Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математическое моделирование ходьбы человека с голеностопным шарнирным ортезом // *Проблемы управления и информатики*. – 2015. – № 2. – С. 46-57.
8. Бербюк В. Є., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Параметрична оптимізація ходи та пружних характеристик пасивних приводів двоногого крокуючого робота // *Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика*. – 2002, №3. – С.17-20.
9. Collins J., Chand S., Vanderkop A., Howard D. A Review of Physics Simulators for Robotic Applications // *IEEE Access*. – 2021. – V. 9, Is. 51. – P. 416–431.
10. Koenig N., Howard A. Design and Use Paradigms for Gazebo, an Open-Source MultiRobot Simulator // *Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. – 2004. – P. 2149–2154.
11. Carpentier J., Saurel G., Buondonno G., Mirabel J., Lamiraux F., Stasse O., Mansard N. The Pinocchio C++ Library: A Fast and Flexible Implementation of Rigid Body Dynamics Algorithms and Their Analytical Derivatives // *IEEE/SICE Int. Symposium on System Integration (SII)*. – 2019. – P. 614–619.
12. Betts J. T. Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming. – Society for Industrial and Applied Mathematics, University City Science Center, Philadelphia. – 2001. – 190 p.
13. Yadhak M.S. Parallel algorithms for data digital filtering // *Cybernetics and Systems Analysis*. – 2023. – Vol. 59, Is. 1. – P. 39-48.
14. Polishchuk O. D., Yadhak M. S. Analysing operation efficiency of a city transportation system by the U-statistics methods. II. Optimization of the interactive evaluation methods // *Cybernetics and Systems Analysis*. – 2024. – Vol. 60, No 2. – P. 268-275.
15. Horstmann C. S. Core Java. Vol.I: Fundamentals (13th ed.), Oracle Press / Pearson. – 2025. 1160 p.

## **Algorithmic and software tools for parametric optimization of gantry robot motion**

Myroslav Demydyuk, Bohdan Prots

*An algorithm and a software application for the parametric optimization of motion laws for a gantry robot with a two-link manipulator are described. Under the control stimuli (active forces and torques in the joints), the robot performs plane-parallel motion in a vertical plane, executing a transport operation to move a load from a specified initial state to a given final state. The problem of finding optimal controls that ensure the execution of the transport operation while minimizing a given functional is formulated. An algorithm for the approximate solution of the problem is constructed, based on the parameterization of each generalized coordinate of the mechanical system by the sum of a cubic polynomial and a finite trigonometric series with unknown coefficients. The polynomial coefficients are determined from the boundary conditions of the transport operation, while the trigonometric series coefficients are found as a solution to the corresponding nonlinear programming problem. The algorithm is implemented as a software application, through which a series of calculations was conducted. The results of numerical simulation confirmed the effectiveness of the parametric optimization method in problems of optimal motion control for the investigated gantry robot.*

Отримано 16.01.2026