

**<https://doi.org/10.15407/fmmit2026.42.071>****Моделювання та комп'ютерний аналіз температурних режимів алюмінієвої панелі за її індукційної термообробки****Роман Мусій<sup>1</sup>, Андрій Кунинець<sup>2</sup>, Юрій Гнатів<sup>3</sup>, Роман Пелех<sup>4</sup>,  
Оксана Хапко<sup>5</sup>**<sup>1</sup>д. ф.-м. н., професор, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,  
e-mail: [roman.s.musij@lpnu.ua](mailto:roman.s.musij@lpnu.ua)<sup>2</sup>к. ф.-м. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,  
e-mail: [andrii.v.kunynets@lpnu.ua](mailto:andrii.v.kunynets@lpnu.ua)<sup>3</sup>к. ф.-м. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,  
e-mail: [yurii.m.hnativ@lpnu.ua](mailto:yurii.m.hnativ@lpnu.ua)<sup>4</sup>аспірант, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,  
e-mail: [roman.y.pelekh@lpnu.ua](mailto:roman.y.pelekh@lpnu.ua)<sup>5</sup>асистент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,  
e-mail: [oksana.b.khapko@lpnu.ua](mailto:oksana.b.khapko@lpnu.ua)

*Розглянуто фізико-математичну модель для визначення температурного поля у неферомагнітній панелі. Дана модель складається з двох етапів. На першому етапі з співвідношень Максвелла визначається нестационарне електромагнітне поле та тепло Джоуля, зумовлені зовнішньою нестационарною електромагнітною дією. На другому етапі з рівняння теплопровідності у якому за джерело тепла приймаються тепло Джоуля, знаходиться нестационарне температурне поле. Панель віднесена до декартової системи координат. Її поперечний переріз є прямокутник. Сформульовано двовимірні початково-крайові задачі електродинаміки і теплопровідності для розглядуваної панелі. За визначальні функції вибрано дотичну до основ панелі компоненту вектора напруженості магнітного поля і температуру. Для знаходження розв'язку сформульованих задач використано кубічну апроксимацію визначальних функцій по товщинній координаті панелі. Коефіцієнти апроксимаційних кубічних поліномів подаються у вигляді лінійних комбінацій інтегральних за товщинною координатою характеристик шуканих функцій та їх граничних значень на основах панелі. Для визначення інтегральних характеристик отримано відповідні одновимірні початково-крайові задачі. Розв'язки цих задач отримуються з використанням скінченного інтегрального перетворення за поперечною координатою прямокутника перерізу панелі та інтегрального перетворення Лапласа за часом. Проведено числовий аналіз температурного поля у алюмінієвій панелі для двох характерних випадків її приповерхневого та суцільного індукційного нагріву квазіусталеним електромагнітним полем. Проаналізовано зміну в часі температури на перехідному режимі та її розподіл по поперечному перерізу панелі після виходу електромагнітного поля на усталений режим.*

**Ключові слова:** алюмінієва панель, квазіусталене електромагнітне поле, температура, приповерхневий та суцільний нагрів, температурні режими.

**Вступ.** Алюмінієві панелі часто використовують як конструктивні елементи у відповідних пристроях енергетики, машино- та авіабудування. Для технологічної термообробки таких панелей використовують індукційний нагрів з використанням квазіусталеного електромагнітного поля (КЕМП). Це дає змогу при відповідних

параметрах такого ЕМП забезпечувати технологічні процеси за приповерхневого та суцільного індукційного нагріву з врахуванням перехідних режимів, що описують моменти включення ЕМП, які мають характер синусоїдально змінних в часі. Для підвищення надійності та довготривалості експлуатації таких електротехнічних та автомобіле- і авіапристроїв, що містять алюмінієві панелі, необхідно розраховувати їх температурні режими з метою прогнозування їх роботоздатності. Для підвищення точності відповідних інженерних розрахунків необхідно використовувати відповідні двовимірні фізико-математичні моделі. У монографіях [1-4] приведено математичні моделі, чисельно-аналітичні та експериментальні підходи для опису та дослідження теплових і температурних режимів пластинчастих елементів конструкцій зазначених вище пристроїв.

У переважній більшості праць розглядаються одновимірні задачі індукційного нагріву електропровідних тіл канонічної форми усталеним ЕМП. За останні роки розроблено низку одновимірних математичних моделей стосовно теплових і температурних процесів, зумовлених індукційним нагрівом усталеним ЕМП. На основі таких моделей детально вивчено процеси нагріву під дією усталеного ЕМП.

Дослідження температурних полів у тонких електропровідних плитах і панелях за індукційного нагріву височастотним електромагнітним полем розглянуто в роботах [5-7].

У сучасних технологіях електромагнітної термообробки електропровідних пластинчастих елементів використовують короткочасний індукційний нагрів з допомогою КЕМП та неусталених ЕМП [8-9]. У роботі [10] досліджено закономірності тепла Джоуля у алюмінієвій панелі за індукційного нагріву КЕМП. Однак, не досліджено температурні режими алюмінієвих панелей, які широко використовуються як конструктивні елементи у автомобіле- та авіапромисловості, а також в енергетичних пристроях, при їх індукційній термообробці КЕМП.

Метою даної роботи є: побудова двовимірної фізико-математичної моделі для визначення і комп'ютерного аналізу температурних режимів електропровідної панелі при її індукційній термообробці з допомогою КЕМП; розробка методики побудови розв'язків відповідних двовимірних початково-крайових задач електродинаміки та теплопровідності для визначення параметрів КЕМП, тепла Джоуля і температури; дослідження температурних режимів алюмінієвої панелі для двох характерних типів її приповерхневого та суцільного індукційного нагріву.

## **1. Двовимірна фізико-математична модель**

У Декартовій системі координат  $OX_1X_2X_3$  розглядається електропровідна панель товщиною  $2h$  і шириною  $2d_*$  (рис.1). Початок системи координат точка  $O$  співпадає з центром симетрії прямокутника її поперечного перерізу. Декартові координати  $X_1, X_3$  віднесемо до пів товщини  $h$  панелі. Надалі будемо розглядати

безрозмірні координати  $x_1 = X_1/h$ ,  $x_3 = X_3/h$  і ширину панелі  $d = d_*/h$ . Панель безмежно довга по осі  $Ox_2$ . Ширина панелі відкладається вздовж  $Ox_1$ , а товщина – вздовж осі  $Ox_3$ .

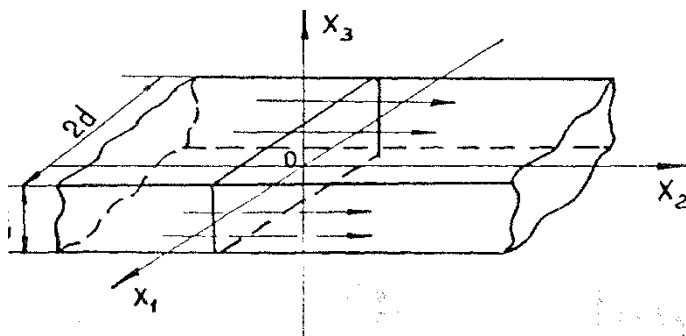


Рис. 1 Електропровідна панель

Панель виготовлена з однорідного, ізотропного і неферомагнітного матеріалу. Електро- і теплофізичні параметри матеріалу вважаються сталими і рівними їх середнім значенням на відповідних інтервалах нагріву.

Індукційний нагрів панелі здійснюється зовнішнім однорідним КЕМП. Внаслідок протікання індукційних струмів у панелі виникає тепло Джоуля  $Q$ , яке створює відповідне температурне поле  $T$ . Для встановлення закономірностей температурних режимів у панелі за відповідних параметрів індукційного нагріву запропоновано двовимірну фізико-математичну модель. Дана модель складається з двох етапів.

На першому етапі зі співвідношень Максвелла визначаємо розподіл ЕМП та питому густину тепла Джоуля у панелі. На другому етапі з рівняння теплопровідності, у якому джерелом тепла є тепло Джоуля, знаходимо розподіл температурного поля  $T$ .

## 2. Визначення електромагнітного поля.

Приймаємо, що вектор напруженості магнітного поля у панелі має вигляд  $\vec{H}(x_1, x_3, t) = \{0; H_2(x_1, x_3, t); 0\}$ . Компонента  $H_2(x_1, x_3, t)$  паралельна до основ панелі  $x_3 = \pm 1$  та до її торцевих перетинів  $x_1 = \pm d$ . Тут  $t$  - час.

Для визначення компоненти  $H_2(x_1, x_3, \tau)$  у розглядуваній панелі отримуємо рівняння:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) H_2 - \frac{\partial H_2}{\partial \tau} = 0. \quad (1)$$

Тут  $\tau = t / (\sigma \mu h^2)$  - безрозмірний час, характерний для дифузії магнітного поля через пів товщину  $h$  панелі;  $\sigma$  - коефіцієнт електропровідності,  $\mu$  - магнітна проникливість матеріалу панелі.

Дії зовнішнього КЕМП задається значеннями компоненти  $H_2(x_1, x_3, t)$  на всіх зовнішніх поверхнях панелі. Відповідно цьому граничні умови для розв'язування рівняння (1) записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} H_2(x_1, \pm 1, \tau) &= H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau) \\ H_2(\pm d, x_3, \tau) &= H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau)$  і  $H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau)$  задані вирази функції  $H_2(x_1, x_3, \tau)$  на поверхнях панелі  $x_3 = \pm 1$ ,  $x_1 = \pm d$ .

Якщо у початковий момент часу  $\tau = 0$  ЕМП у панелі відсутнє, то початкова умова на функцію  $H_2(x_1, x_3, \tau)$  має вигляд:

$$H_2(x_1, x_3, 0) = 0 \quad (3)$$

У кутових точках поперечного перерізу панелі повинні також виконуватись умови узгодження функцій  $H_2^{\pm(0)}$  і  $H_2^{\pm(0)*}$ , а саме:

$$\begin{aligned} H_2^{+(0)}(d, \tau) &= H_2^{+(0)*}(1, \tau), \quad H_2^{-(0)}(d, \tau) = H_2^{-(0)*}(-1, \tau), \\ H_2^{+(0)}(-d, \tau) &= H_2^{-(0)*}(1, \tau), \quad H_2^{-(0)}(-d, \tau) = H_2^{+(0)*}(-1, \tau). \end{aligned} \quad (4)$$

Вектор напруженості електричного поля у панелі визначаємо з співвідношення

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} (\text{rot} \vec{H}). \quad (5)$$

Дві відмінні від нуля компоненти вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}(x_1, x_3, \tau) = \{ E_1(x_1, x_3, \tau); 0; E_3(x_1, x_3, \tau) \}$  описуються виразами:

$$E_1 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_3}, \quad E_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_1}. \quad (6)$$

Питому густину тепла Джоуля знаходимо за формулою

$$Q = \sigma \vec{E} \vec{E} \quad (7)$$

тобто з врахуванням скалярного добутку маємо вираз

$$Q = \frac{1}{\sigma} [E_1^2 + E_3^2]. \quad (8)$$

Через функцію  $H_2(x_1, x_3, \tau)$  тепло Джоуля записується формулою

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

### 3. Визначення температурного поля

Температурне поле  $T(x_1, x_3, t)$  у панелі, яке зумовлене теплом Джоуля  $Q(x_1, x_3, t)$ , знаходимо з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} - \frac{\partial T}{\partial Fo} = -\frac{Q}{\lambda}. \quad (10)$$

Тут  $Fo = \frac{\kappa t}{h^2}$  – безрозмірний час Фур'є;  $\kappa, \lambda$  – коефіцієнти температуро- і теплопровідності матеріалу панелі. Рівняння (10) розв'язуємо за умов конвективного теплообміну

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} \pm Bi^\pm T = 0 \quad (11)$$

на поверхнях  $x_3 = \pm 1$  та умов

$$\frac{\partial T}{\partial x_3} \pm Bi_*^\pm T = 0 \quad (12)$$

на поверхнях  $x_1 = \pm d$ , панелі та при нульовій умові

$$T(x_1, x_3, 0) = 0 \quad (13)$$

в початковий момент часу Фур'є  $Fo = 0$ . Тут  $Bi^\pm$  і  $Bi_*^\pm$  – значення критерію Біо на поверхнях  $x_3 = \pm 1$  і  $x_1 = \pm d$ .

### 4. Побудова розв'язку задачі електродинаміки

Для знаходження розв'язку рівняння (1) використовуємо апроксимацію компоненти  $H_2(x_1, x_3, \tau)$  вектора  $\vec{H}$  по товщинній змінній  $x_3$  кубічним поліномом

$$H_2(x_1, x_3, \tau) = \sum_{j=1}^4 a_{2(j-1)}(x_1, \tau) x_3^{j-1}. \quad (14)$$

Коефіцієнти  $a_{2(j-1)}(x_1, \tau)$  полінома (14) подаємо через інтегральні характеристики

$$H_{2s}(x_1, \tau) = \frac{2s-1}{2} \int_{-1}^1 H_2(x_1, x_3, \tau) x_3^{s-1} dx_3 \quad (s = 1, 2) \quad (15)$$

компоненти  $H_2$  вектора напруженості магнітного поля і задані граничні значення  $H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau)$  компоненти  $H_2(x_1, x_3, \tau)$  на поверхнях  $x_3 = \pm h$ . Рівняння для визначення інтегральних характеристик  $H_{2s}$  отримуємо множенням рівняння (1) на  $x_3^{s-1}$  та їх інтегруванням по змінній  $x_3$  з врахуванням формул (14), (15).

Система вихідних рівнянь для інтегральних характеристик  $H_{2s}$  ( $s = 1, 2$ ), компоненти  $H_2$  записується

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) H_{21}(x_1, \tau) - 3H_{21}(x_1, \tau) = -\frac{3}{2} \left[ H_2^{+(0)}(x_1, \tau) + H_2^{-(0)}(x_1, \tau) \right], \quad (16)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) H_{22}(x_1, \tau) - 15H_{22}(x_1, \tau) = \frac{15}{2} \left[ H_2^{+(0)}(x_1, \tau) - H_2^{-(0)}(x_1, \tau) \right].$$

Відповідно початкові умови на функції  $H_{2s}$  ( $s = 1, 2$ ) будуть:

$$H_{21}(x_1, 0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 H_2(x_1, x_3, 0) dx_3, \quad H_{22}(x_1, 0) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 H_2(x_1, x_3, 0) x_3 dx_3, \quad (17)$$

Коефіцієнти апроксимаційного кубічного полінома (14) виражаються через інтегральні характеристики  $H_{2s}$  і задані граничні значення функції  $H_2$  на поверхнях  $x_3 = \pm 1$  формулами

$$\alpha_{20} = \frac{3}{2} H_{21} - \frac{1}{4} q_1, \quad \alpha_{21} = \frac{5}{2} H_{22} - \frac{3}{4} q_2, \quad (18)$$

$$\alpha_{22} = \frac{3}{4} q_1 - \frac{3}{2} H_{21}, \quad \alpha_{23} = \frac{5}{4} q_2 - \frac{5}{2} H_{22},$$

де  $q_1 = H_2^{+(0)} + H_2^{-(0)}$ ,  $q_2 = H_2^{+(0)} - H_2^{-(0)}$ .

Систему рівнянь (16) на інтегральні характеристики  $H_{2s}$  ( $s = 1, 2$ ) розв'язуємо за граничних умов

$$H_{21}(\pm d, \tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau) dx_3, \quad H_{22}(\pm d, \tau) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau) x_3 dx_3. \quad (19)$$

Тут  $H_2^{\pm(0)*}$  - відомі функції (задані на поверхнях  $x_1 = \pm d$  значення функції  $H_2$ ). Враховуючи неоднорідні граничні умови (19) на функції  $H_{2s}$  ( $s = 1, 2$ ) подаємо розв'язок системи рівнянь (16) у вигляді

$$H_{2s} = H_{2s}^* + H_{2s}^{**}. \quad (20)$$

Доданки  $H_{2s}^*$  в силу граничних умов (19) будуть

$$H_{2s}^* = \frac{1}{2} \left[ (H_{2s}(d, \tau) + H_{2s}(-d, \tau)) + \frac{x_1}{d} (H_{2s}(d, \tau) - H_{2s}(-d, \tau)) \right]. \quad (21)$$

При цьому, на основі системи рівнянь (16) для функції  $H_{2s}$  ( $s = 1, 2$ ), доданки  $H_{2s}^{**}$  задовольняють рівнянням

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \frac{d}{d\tau} - 3\right)H_{21}^* = -\frac{3}{2}\left(H_2^{+(0)} + H_2^{-(0)}\right) + \left(\frac{d}{d\tau} + 3\right)H_{21}^*, \quad (22)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \frac{d}{d\tau} - 15\right)H_{22}^{**} = -\frac{15}{2}\left(H_2^{+(0)} - H_2^{-(0)}\right) + \left(\frac{d}{d\tau} + 3\right)H_{21}^*$$

при однорідних граничних і початкових умовах:

$$H_{2s}^{**}(x_1, 0) = H_{2s}(x_1, 0) - H_{2s}^*(x_1, 0) \quad (23)$$

Для розв'язування задачі (22), (23) використовуємо скінчене інтегральне перетворення по координаті  $x_1$  з ядром

$$K(\alpha_k, x_1) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sin \alpha_k (x_1 + d), \quad (24)$$

де  $\alpha_k = \frac{\pi k}{2d}$ ,  $k \in N$ . Відповідно маємо пряме і обернене скінчені інтегральні перетворення:

$$\tilde{H}_{2sk}^{**}(\alpha_k, \tau) = \int_{-d}^d H_{2s}^{**}(x_1, \tau) K(\alpha_k, x_1) dx_1, \quad (25)$$

$$H_{2s}^{**}(x_1, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{H}_{2sk}^{**}(\alpha_k, \tau) K(\alpha_k, x_1). \quad (26)$$

Застосуємо до системи (22) скінченне інтегральне перетворення (25). Застосовуючи перетворення Лапласа за часом до перетворених рівнянь системи (22), з урахуванням початкових умов (23) для функцій  $H_{2s}^{**}$  і потім, застосовуючи до системи (22) обернене скінченне інтегральне перетворення (26), отримуємо вирази

$$H_{21}^{**}(x_1, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\alpha_k^2 + 3)\tau} \left[ \tilde{\Phi}_{21k}(\alpha_k, \tau) - \tilde{\Phi}_{21k}(\alpha_k, 0) + \tilde{H}_{21k}^{**}(\alpha_k, 0) \right] K(\alpha_k, x_1), \quad (27)$$

$$H_{22}^{**}(x_1, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\alpha_k^2 + 15)\tau} \left[ \tilde{\Phi}_{22k}(\alpha_k, \tau) - \tilde{\Phi}_{22k}(\alpha_k, 0) + H_{22k}^{**}(\alpha_k, 0) \right] K(\alpha_k, x_1).$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{21k}(\alpha_k, \tau) = \int e^{-(\alpha_k^2 + 3)\tau} & \left\{ \frac{3}{2} \left[ \tilde{H}_2^{+(0)}(\alpha_k, \tau) + \tilde{H}_2^{-(0)}(\alpha_k, \tau) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\alpha_k \sqrt{d}} \left( \frac{d}{d\tau} + 3 \right) \left[ (-1)^k H_{21*}^+(\tau) - H_{21**}^-(\tau) \right] \right\} d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{22k}(\alpha_k, \tau) = \int e^{-(\alpha_k^2 + 15)\tau} \left\{ \frac{15}{2} \left[ \tilde{H}_2^{+(0)}(\alpha_k, \tau) - \tilde{H}_2^{-(0)}(\alpha_k, \tau) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha_k \sqrt{d}} \left( \frac{d}{d\tau} + 15 \right) \left[ (-1)^k H_{22*}^+(\tau) + H_{22**}^-(\tau) \right] \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Після знаходження інтегральних характеристик  $H_{2s}$  функція  $H_2(x_1, x_3, \tau)$  має вигляд

$$H_2(x_1, x_3, \tau) = H_{21} \frac{3}{2} (1 - x_3^2) + H_{22} \frac{5}{2} (x_3 - x_3^3) - \frac{1}{4} q_1 (1 - 3x_3^2) - \frac{1}{4} q_2 (3x_3 - 5x_3^3). \quad (28)$$

За знайденою функцією  $H_2(x_1, x_3, \tau)$  вектор напруженості електричного поля визначається таким чином

$$\vec{E}(x_1, x_3, \tau) = \{ E_1; 0; E_3 \} = \left\{ -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_3}; 0; \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_1} \right\} \quad (29)$$

Запишемо вирази складових  $E_1$  і  $E_3$  вектора напруженості електричного поля через інтегральні характеристики  $H_{2s}$  функції  $H_2(x_1, x_3, \tau)$ :

$$E_1 = \frac{1}{\sigma} \left[ -3H_{21}x_3 + \frac{5}{2}(1 - 3x_3^2)H_{22} + \frac{3}{2}x_3q_1 - \frac{3}{4}q_2(1 - 5x_3^2) \right], \quad (30)$$

$$E_3 = \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{3}{2}(1 - x_3^2) \frac{dH_{21}}{dx_1} + \frac{5}{2}(x_3 - x_3^3) \frac{dH_{22}}{dx_1} - \frac{1}{4}(1 - 3x_3^2) \frac{dq_1}{dx_1} - \frac{1}{4}(3x_3 - 5x_3^3) \frac{dq_2}{dx_1} \right].$$

Далі за формулою (8) обчислюємо питому густину тепла Джоуля  $Q$ .

## 5. Побудова розв'язку задачі теплопровідності

Для знаходження розв'язку рівняння теплопровідності (10) використовуємо апроксимацію температури  $T(x_1, x_3, Fo)$  по товщинній змінній  $x_3$  кубічним поліномом

$$T(x_1, x_3, Fo) = \sum_{j=1}^4 b_{2(j-1)}(x_1, Fo) x_3^{j-1}. \quad (31)$$

Коефіцієнти  $b_{2(j-1)}(x_1, Fo)$  полінома (31) подаємо через інтегральні характеристики температури

$$T_s(x_1, Fo) = \frac{2s-1}{2} \int_{-1}^1 T(x_1, x_3, Fo) x_3^{s-1} dx_3 \quad (s=1, 2) \quad (32)$$

та її граничні значення  $T^\pm(x_1, Fo)$  на поверхнях  $x_3 = \pm 1$ . Рівняння для визначення інтегральних характеристик  $T_s(x_1, Fo)$  отримуємо множенням рівняння (10) на  $x_3^{s-1}$  та їх інтегруванням по змінній  $x_3$  з врахуванням формул (31), (32).

Система вихідних рівнянь для інтегральних характеристик  $T_s$  ( $s=1, 2$ ), температури  $T$  записується

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial Fo} \right) T_1(x_1, Fo) + d_1 T_2(x_1, Fo) = d_2 \int_{-1}^1 Q(x_1, x_3, Fo) dx_3, \quad (33)$$

$$d_3 T_1(x_1, Fo) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial Fo} \right) T_2(x_1, Fo) = d_4 \int_{-1}^1 Q(x_1, x_3, Fo) x_3 dx_3.$$

Тут числові коефіцієнти  $d_1 - d_4$  визначаються через теплофізичні характеристики матеріалу панелі та значення критерію Біо на відповідних поверхнях панелі. Відповідно до нульової початкової умови (13) на температуру отримуємо також нульові початкові умови на інтегральні характеристики  $T_s$  ( $s=1, 2$ ) температури. Систему рівнянь (33) на інтегральні характеристики  $T_s$  ( $s=1, 2$ ) температури розв'язуємо із використанням скінченного інтегрального перетворення за змінною  $x_1$  з врахуванням граничних умов (11) і (12) конвективного теплообміну на зовнішніх поверхнях панелі. Ядро такого скінченного інтегрального перетворення приведено в роботі [11]. Після цього, до перетвореної системи (33) застосовуємо інтегральне перетворення Лапласа за часом Фур'є. Виконуючи обернені інтегральні перетворення скінчене і Лапласа, записуємо вирази інтегральних характеристик  $T_s$  ( $s=1, 2$ ) температури, через які подаються коефіцієнти апроксимаційного полінома (31).

## 6. Комп'ютерний аналіз температурних режимів алюмінієвої панелі за індукційної термообробки квазіусталеним електромагнітним полем

Розглядаємо індукційний нагрів електропровідної панелі однорідним КЕМП. Значення компоненти  $H_2(x_1, x_3, \tau)$  вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  на основах  $x_3 = \pm 1$  і торцевих площинах  $x_1 = \pm d$  панелі задаються виразами:

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_0 \phi(\tau) e^{ib\tau}, \quad H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_0 \phi(\tau) e^{ib\tau}. \quad (34)$$

При цьому умови (4) узгодження значень функцій  $H_2^{\pm(0)}$  і  $H_2^{\pm(0)*}$  у кутових точках поперечного перерізу панелі виконуються тотожно.

У виразах (34) функція  $\phi(\tau)$  має вигляд:

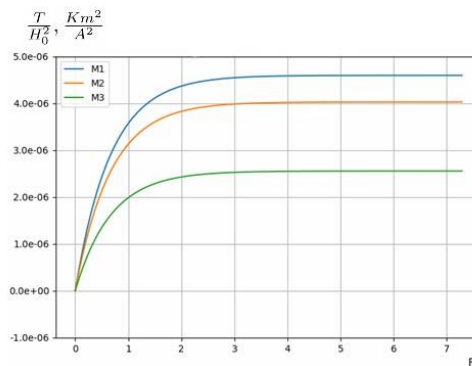
$$\phi(\tau) = 1 - e^{\beta\tau}. \quad (35)$$

Тут  $i = \sqrt{-1}$ ;  $b = 1 / (2\delta_0^2)$ ;  $\delta_0 = (2\omega\sigma\mu h^2)^{-1/2}$  - параметр, що визначає відносну до пів товщини панелі  $h$  глибину проникання індукційних струмів частоти  $\omega$ ;  $\beta = \ln \varepsilon / \tau_*$ ;  $\tau_*$  - безрозмірний час, що відповідає виходу електромагнітних коливань частоти  $\omega$  на усталений режим з амплітудою  $H_0$ ;  $\varepsilon = 0.001$ .

Підставляючи вирази (34) у відповідні формули пункту 4, отримуємо вираз компоненти  $H_2(x_1, x_3, \tau)$  вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  та тепла Джоуля у розглядуваній панелі. Підставляючи знайдений вираз тепла Джоуля у систему (33) та використовуючи відповідні перетворення знаходимо вираз температури даної панелі за умов конвективного теплообміну на її поверхнях.

Числовий експеримент виконано для електропровідної панелі, виготовленої з алюмінію [12]. Товщина панелі  $2h = 2 \text{ mm}$ , ширина  $2d_* = 80 \text{ mm}$  (відносна півширина панелі  $d = 40$ ). Розрахунки проведено для двох значень параметра  $\delta_0$  відносно до пів товщини панелі  $h$  глибини проникання індукційних струмів:

- 1)  $\delta_0 = 0.1$  - приповерхневий нагрів;
- 2)  $\delta_0 = 1$  - суцільний нагрів панелі.



*Рис. 2. Зміна в часі Фур'є  $Fo$  температури  $T/H_0^2$  за приповерхневого ( $\delta_0 = 0.1$ ) індукційного нагріву КЕМП і значення критерію Біо Ві = 1 у характерних точках  $M_1(0.25 d, 0.25)$ ,  $M_2(0.5 d, 0.5)$ ,  $M_3(0.9 d, 0.9)$  поперечного перерізу алюмінієвої панелі*

Приповерхневому нагріву розглядуваної панелі відповідає кругова частота електромагнітних коливань  $\omega_1 = 1.09574 \cdot 10^6 \text{ 1/s}$ , а суцільному нагріву - кругова

частота електромагнітних коливань  $\omega_2 = 1.09574 \cdot 10^4$  1/s. Частота  $\omega_1$  належить до радіочастотного діапазону ЕМП, а частота  $\omega_2$  є поза околom цього діапазону.

На рис. 2, 3 показано зміну в часі Фур'є  $F_0$  температури  $T/H_0^2$  за приповерхневого та суцільного індукційного нагріву панелі з допомогою КЕМП за значення критерію Біо  $Bi = 1$ . Обчислення проведено у характерних точках  $M_1$  (0.25 d, 0.25),  $M_2$  (0.5 d, 0.5),  $M_3$  (0.9 d, 0.9) поперечного перерізу алюмінієвої панелі. На рисунках синя лінія відповідає точці  $M_1$ , оранжева – точці  $M_2$ , зелена – точці  $M_3$ .

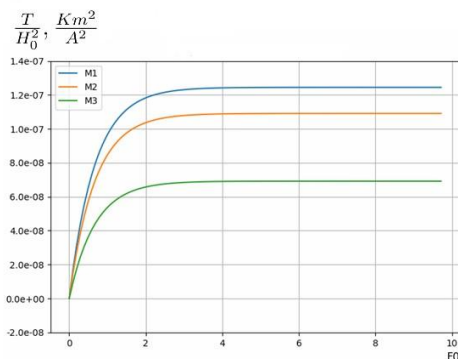


Рис. 3. Зміна в часі Фур'є  $F_0$  температури  $T/H_0^2$  за суцільного ( $\delta_0 = 1$ ) індукційного нагріву КЕМПі значення критерію Біо  $Bi = 1$  у характерних точках  $M_1$  (0.25 d, 0.25),  $M_2$  (0.5 d, 0.5),  $M_3$  (0.9 d, 0.9) поперечного перерізу алюмінієвої панелі

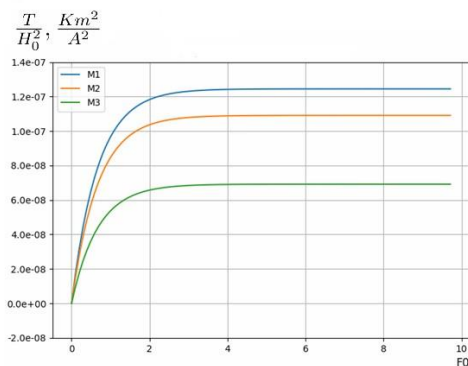


Рис. 4. Розподіл по поперечному перерізу алюмінієвої панелі температури  $T/H_0^2$  за приповерхневого ( $\delta_0 = 0.1$ ) індукційного нагріву КЕМП і значення критерію Біо  $Bi = 1$  в момент часу  $F_0 = 4$

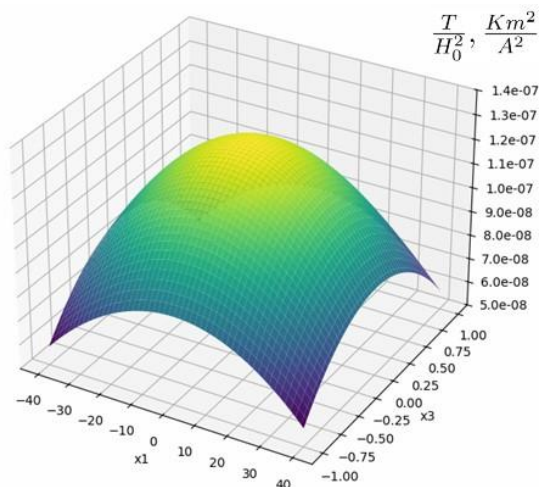


Рис. 5. Розподіл по поперечному перерізу алюмінієвої панелі температури  $T/H_0^2$  за суцільного ( $\delta_0 = 1$ ) індукційного нагріву КЕМП і значення критерію Біо  $Bi = 1$  в момент часу  $Fo = 4$

На основі аналізу залежностей, приведених на рис. 2 і рис. 3, встановлено, що вихід на усталений температурний режим розглядуваної алюмінієвої панелі при індукційному нагріві КЕМП (досягнення максимальних значень температури) відбувається в обох випадках приповерхневого та суцільного нагріву за значення критерію Біо  $Bi = 1$  в моменти безрозмірного часу Фур'є  $Fo \geq 4$ .

На рис. 4 і рис. 5 зображено 3d-графіки розподілу температури  $T/H_0^2$  по площі поперечного перерізу алюмінієвої панелі в момент часу  $Fo \geq 4$  в обох випадках приповерхневого ( $\delta_0 = 0.1$ ) та суцільного ( $\delta_0 = 1$ ) індукційного нагріву за значення критерію Біо  $Bi = 1$ .

З аналізу рис. 4, 5 випливає, що розподіл температури  $T/H_0^2$  по площі поперечного перерізу алюмінієвої панелі в обох випадках приповерхневого і суцільного індукційного нагріву в усталеному режимі має однаковий якісний характер. Числові значення температури  $T/H_0^2$  панелі за її приповерхневого нагріву приблизно у 40 разів більші за такі ж значення за суцільного нагріву.

### Висновки

У результаті проведеного комп'ютерного аналізу температури отримано такі закономірності:

1) значення температури  $T/H_0^2$  для обох розглянутих випадків приповерхневого і суцільного нагріву зростають по мірі наближення до ребер панелі (до кутових точок прямокутника поперечного перерізу);

2) безрозмірний час Фур'є  $Fo^*$  виходу значень температури  $T/H_0^2$  на її максимальні значення, що відповідають усталеному режиму індукційного нагріву при значенні критерію Біо  $Bi = 1$ , дорівнює  $Fo^* = 4$ .

3) значення безрозмірного часу Фур'є  $Fo^*$  залежить від значення безрозмірного критерію Біо  $Bi$ . Зі зменшенням значення критерію  $Bi$  на порядок час  $Fo^*$  зростає на порядок, і навпаки, зі збільшенням значення критерію  $Bi$  на порядок час  $Fo^*$  зменшується на порядок.

4) у випадку суцільного нагріву ( $\delta_0 = 1$ ) максимальні значення температури  $T/H_0^2$  за значення критерію  $Bi = 1$  менші приблизно у 40 разів порівняно з такими самими значеннями для приповерхневого нагріву ( $\delta_0 = 0.1$ );

5) зі збільшенням величини  $H_0$ , що відповідає амплітуді усталених електромагнітних коливань в обох розглянутих випадках приповерхневого і суцільного індукційного нагріву максимальні значення температури  $T$  зростають за квадратичним законом.

Проведений у даній роботі комп'ютерний аналіз температурних режимів алюмінієвої панелі індукційного нагріву КЕМП має важливе теоретичне і прикладне значення для розрахунків оптимальних режимів індукційної термообробки алюмінієвих пластинчастих елементів та прогнозування роботоздатності алюмінієвих панелей, які зазнають дії зовнішнього квазіусталеного електромагнітного поля.

#### Література

1. Lupi, S. Fundamentals of Electroheat, Electrical Technologies for Process Heating; Springer: Cham, Switzerland, 2017. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-46015-4>
2. Bobart, G.F. Inductionheating. AccessScience. 2020. Availableonline: <https://www.accessscience.com/content/article/a341500>
3. Rudnev, V.; Loveless, D.; Cook, R. Handbook of Induction Heating; CRC Press: London, UK; Taylor and Francis Group: Abingdon, UK, 2018.
4. Asai S. Electromagnetic Processing of Materials. Springer, Netherlands (2012).
5. Milošević-Mitić, V., Maneski T., Temperature loading of a thinmetallic plate subjecte transversal tolaw-frequency electromagnetic field, *FME TRANSACTIONS*, 2010, Vol. 38, no. 2, 95 – 102
6. Shen, H., Yao, Z.Q., Shi, Y.J. andHu, J. Study on temperature fieldin high frequency induction heating, *Acta Metallurgica Sinica (Englis hLetters)*, Vol. 19, No. 3, pp. 190-196, 2006. [https://doi.org/10.1016/S1006-7191\(06\)60043-4](https://doi.org/10.1016/S1006-7191(06)60043-4)
7. Гачкевич, О. Р., Дробенко, Б. Д., Ванкевич, П. І., Яковлев, М. Ю. Оптимізація режимів високотемпературної індукційної обробки нелінійних електропровідних тіл// Проблеми міцності, 2017, № 3. С. 98-104.
8. Musii, R.; Pukach, P.; Kohut, I.; Vovk, M.; Šlahor, L. Determination and Analysi of Joule's Heatand Temperature in an Electrically Conductive Plate Element Subject to Short-Term Induction Heating by a Non-Stationary Electromagnetic Field// *Energies* 2022, 15, 5250. <https://doi.org/10.3390/en15145250>
9. Musii R., Pukach P., Melnyk N., Vovk M., Šlahor L. Modeling of the temperature regimes in a layered bimetallic plateunde rshort-terminduction heating // *Energies*. – 2023. – Vol. 16, iss. 13.
10. Мусій, Р., Куниць, А., Гошко, Л., Пелех, Р. Аналіз теплових режимів алюмінієвої пластини за дії квазіусталеного електромагнітногополя. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, (41), pp. 15-26, 2025. <https://doi.org/10.15407/fmmit2025.41.015>
11. Галіцин А.С., Жуковський А.Н. Інтегральні перетворення і спеціальні функції в задачах

**Роман Мусій, Андрій Кунинець, Юрій Гнатів, Роман Пелех, Оксана Хапко**  
**Моделювання та комп'ютерний аналіз температурних режимів алюмінієвої панелі за її індукційної термообробки**

теплопровідності. – Київ: Наукова думка, 1976. – 283 с.  
12. Thompson, M. Base Metals Handbook; Woodhead Publishing, Cambridge, UK, 2006.  
<https://doi.org/10.1016/B978-1-84569-154-7.50009-8>

## **Modeling and computer analysis of temperature profiles in an aluminum panel during induction heat treatment**

Roman Musii, Andrii Kunynets, Yuriy Hnativ, Roman Pelekh,  
Oksana Khapko

*A physical-mathematical model for determining the temperature field in a non-ferromagnetic panel is considered. This model consists of two stages. In the first stage, Maxwell's equations are used to determine the transient electromagnetic field and Joule heating caused by an external transient electromagnetic field. In the second stage, the transient temperature field is determined from the heat conduction equation, in which Joule heating is taken as the heat source. The panel is referenced to a Cartesian coordinate system. Its cross-section is a rectangle. Two-dimensional initial-boundary value problems in electrodynamics and heat conduction have been formulated for the panel under consideration. The determinant functions selected are the component of the magnetic field stress vector tangent to the panel's bases and the temperature. The solution to these problems is obtained using a cubic approximation of the determinant functions with respect to the panel's thickness coordinate. The coefficients of the cubic approximation polynomials are expressed as linear combinations of the integral characteristics of the sought functions—integrated over the thickness coordinate—and their boundary values at the panel edges. The corresponding one-dimensional boundary value problems were formulated to determine the integral characteristics. The solutions to these problems are obtained using a finite integral transform with respect to the transverse coordinate of the panel's cross-section and a Laplace integral transform with respect to time. We carried out a numerical analysis of the temperature field in an aluminum panel for two typical cases: near-surface and through-heating by a quasi-steady electromagnetic field. The time-dependent temperature variation during the transient regime and its distribution across the cross-section of the panel after the electromagnetic field reaches steady state are analyzed.*

Отримано 09 04 2026