

Дослідження температурних режимів сталевго стержня за дії неусталеного електромагнітного поля**Наталія Мельник¹, Роман Мусій², Надія Тимошенко³, Адріан Торський⁴**¹к. ф.-м. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: natalia.b.melnyk@lpnu.ua²д. ф.-м. н., професор, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: roman.s.musij@lpnu.ua³к. ф.-м. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: nadiaa.m.tymoshenko@lpnu.ua⁴к. т. н., с.н.с., ІППММ ім. Я. С. Підстригача,
e-mail: adrian@cmm.lviv.ua

Запропоновано фізико-математичну модель для визначення температурного поля у сталевому стержні за дії неусталеного електромагнітного поля. Дана модель описується послідовно зв'язаними рівняннями Максвелла та рівняннями теплопровідності Фур'є. Вона складається з двох етапів: визначення осової компоненти вектора напруженості магнітного поля та температури. Записано вихідні співвідношення початково-крайових задач електродинаміки і теплопровідності для розглядуваного стержня. Для побудови їх розв'язків використано кубічну апроксимацію розподілу визначальних функцій по радіальній координаті. У результаті вихідні початково-крайові задачі на визначальні функції зведено до задач Коші за часовою зміною на інтегральні характеристики визначальних функцій за радіальною змінною. Загальні розв'язки задач Коші записано з допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Коефіцієнти апроксимаційних поліномів подано у вигляді лінійної комбінації інтегральних характеристик та визначальних функцій на поверхні стержня. Отримано вирази тепла Джоуля та температури у розглядуваному стержні за дії неусталеного електромагнітного поля. Виконано числовий аналіз зміни в часі та розподілу по радіусу стержня температури залежно від часу тривалості неусталеного електромагнітного поля і величини напруженості магнітного поля.

Ключові слова: сталевий стержень, неусталене електромагнітне поле, осова компонента вектора напруженості магнітного поля, тепло Джоуля, температура.

Вступ. Сталеві циліндричні стержні є конструктивними елементами багатьох електротехнічних та енергетичних пристроїв, а також автомобільних двигунів. Для їх технологічної обробки використовують нестационарні електромагнітні поля (ЕМП) різних типів[1, 2], залежно від характеру їх змін у часі, зокрема неусталені ЕМП.З допомогою таких ЕМП здійснюють короточасний індукційний нагрів електропровідних елементів.

У праці [3] описано електромагнітні процеси, які виникають у електропровідних елементах під дією ЕМП.У роботах [4, 5] подано короткий опис особливостей індукційного нагріву та різноманітних його застосувань. Розглянуто фізичні властивості нагрітих матеріалів та основні металургійні аспекти, пов'язані

зі специфікою термічної обробки з використанням електромагнітного нагріву для поверхневого зміцнення, загартування, зняття напружень та відпалу деталей конструкцій. У роботі [6] узагальнено основні етапи технології індукційного нагріву та проаналізовано поточний стан індукційних систем у промисловому, побутовому та медичному застосуванні.

Роботи [7, 8] присвячені визначенню та аналізу тепла Джоуля і температури в одношарових і двошарових пластинчастих електропровідних елементах, що піддаються короткочасному індукційному нагріву неусталеним ЕМП. Дослідження режимів нагріву сталевгої смуги прямокутного перерізу під дією квазіусталеного ЕМП на основі двовимірної нестационарної моделі наведено в праці [9]. У роботі [10] проведено аналіз теплових режимів сталевго вала за приповерхневої та суцільної індукційної термообробки.

Проте дослідження температурних режимів у електропровідних тілах циліндричної геометрії, зокрема, стержнях, є важливим інженерним завданням і потребує додаткового вивчення.

У даній роботі запропоновано фізико-математичну модель визначення температурного поля у циліндричних тілах за дії нестационарних ЕМП, а також досліджено температурні режими сталевго стержня під час його технологічної термообробки неусталеним ЕМП.

1. Фізико-математична модель.

Розглядається електропровідний стержень радіуса R , який піддається індукційній термообробці. Стержень віднесено до циліндричної системи координат $O\varphi z$, вісь Oz якої співпадає з його віссю симетрії. Вважаємо, що матеріал, з якого виготовлено стержень, є однорідним, ізотропним та неферомагнітним, а його електрофізичні параметри (коефіцієнт електропровідності σ і магнітна проникливість μ) є сталими.

Індукційна термообробка здійснюється неусталеним ЕМП синусоїдального характеру, що математично описується виразом:

$$H_{z0}(t) = kH_0(\exp(-\beta_1 t) - \exp(-\beta_2 t))\cos \omega t. \quad (1)$$

Тут $H_{z0}(t)$ – значення осової компоненти вектора напруженості магнітного поля $\vec{H} = \{0; 0; H_z(r, t)\}$ на поверхні стержня; β_1, β_2 – параметри, що відповідають часам фронтів наростання і спадання імпульсного сигналу, що модулює несучі електромагнітні коливання кругової частоти ω амплітуди H_0 ; k – нормувальний множник, t – час. Закон зміни ЕМП в часі (1) дає змогу врахувати моменти включення і виключення струму в індукційній системі. Дія неусталеного ЕМП вигляду (1) зумовлює виникнення у стержні вихрових струмів, які створюють у

ньому об'ємно розподілене нестационарне джерело тепла Джоуля Q . Це тепло зумовлює відповідний розподіл температури у стержні.

Фізико-математична модель для визначення температурного поля у стержні складається з двох етапів: 1) на основі співвідношень Максвелла визначається відмінна від нуля осьова компонента $H_z(r, t)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ і питома густина тепла Джоуля $Q(r, t)$; 2) З рівняння теплопровідності Фур'є, в якому джерело тепла є тепло Джоуля, визначаємо розподіл температурного поля у стержні.

1.1. Визначення параметрів ЕМП.

Компоненту $H_z(r, t)$ вектора $\vec{H}$ визначаємо зрівняння:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} - \sigma \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

яке розв'язуємо за крайової умови

$$H_z(R, t) = H_{z0}(t) \quad (3)$$

на зовнішній поверхні $r = R$ стержня та умови осесиметричності ЕМП на його осі $r = 0$

$$\frac{\partial H_z(0, t)}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

У момент часу $t = 0$ початкова умова має вигляд

$$H_z(r, 0) = 0. \quad (5)$$

За знайденою функцією $H_z(r, t)$ записуємо вираз питомої густини тепла Джоуля

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial H_z}{\partial r} \right)^2 \quad (6)$$

у стержні.

1.2. Визначення температурного поля.

Температурне поле $T(r, t)$ у стержні, яке зумовлене теплом Джоуля $Q(r, t)$, знаходимо з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{Q}{\lambda}. \quad (7)$$

Тут κ , λ – коефіцієнти температуро- і теплопровідності матеріалу стержня. Рівняння (9) розв'язуємо за умов конвективного теплообміну на поверхні $r = R$ стержня та умови осесиметричності температурного поля на його осі $r = 0$:

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial r} = 0 \quad (8)$$

та при нульовій початковій умові

$$T(r, 0) = 0. \quad (9)$$

2. Методика побудови розв'язків початково-крайових задач.

Для знаходження розв'язків початково-крайових задач (2)-(5) і (7)-(9) апроксимуємо розподіл визначальних функцій $\Phi(r, t) = \{H_z(r, t), T(r, t)\}$ за радіальною координатою кубічними поліномами виду

$$\Phi(r, t) = \sum_{i=0}^3 a_i^\Phi(t) r^i. \quad (10)$$

Коефіцієнти апроксимаційних поліномів (10) визначаються через граничні значення визначальних функцій на поверхні $r = R$ стержня та їх інтегральні характеристики $\Phi_s(t)$

$$\Phi_s(t) = \frac{s+1}{R^{s+1}} \int_0^R \Phi(r, t) r^s dr, \quad s=1,2. \quad (11)$$

Для знаходження інтегральних характеристик $\Phi_s(t)$ вихідні рівняння (2) і (7) інтегруємо за радіальною координатою r відповідно до формули (11) і використовуємо при перетвореннях подання (10). Отримуємо системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dH_{z1}(t)}{dt} + d_1 H_{z1}(t) + d_2 H_{z2}(t) &= d_3 H_{z0}(t), \\ \frac{dH_{z2}(t)}{dt} + d_4 H_{z1}(t) + d_5 H_{z2}(t) &= d_6 H_{z0}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

на інтегральні характеристики $H_{zs}(t)$ ($s=1,2$) функції $H_z(r,t)$ та

$$\begin{aligned}\frac{dT_1(t)}{dt} + d_7 T_1(t) + d_8 T_2(t) &= d_9 W_1(t), \\ \frac{dT_2(t)}{dt} + d_{10} T_1(t) + d_{11} T_2(t) &= d_{12} W_2(t)\end{aligned}\quad (13)$$

на інтегральні характеристики $T_s(t)$ ($s=1,2$) температури $T(r,t)$.

Тут $d_1 \div d_{12}$ - числові коефіцієнти, що залежать від електро- і теплофізичних характеристик матеріалу циліндра;

$$W_s(t) = \frac{s+1}{\lambda R^{s+1}} \int_0^R Q(r,t) r^s dr, \quad (s=1,2). \quad (14)$$

Застосовуючи перетворення Лапласа за часом до систем (12), (13) отримуємо такі вирази інтегральних характеристик $H_{zs}(t)$ функції $H_z(r,t)$

$$\begin{aligned}H_{z1}(t) &= \sum_{\kappa=1}^2 \int_0^t H_{z0}(t-\tau) \cdot A_1(p_\kappa) e^{p_\kappa \tau} d\tau, \\ H_{z2}(t) &= \sum_{\kappa=1}^2 \int_0^t H_{z0}(t-\tau) \cdot A_2(p_\kappa) e^{p_\kappa \tau} d\tau\end{aligned}\quad (15)$$

та інтегральних характеристик $T_s(t)$ ($s=1,2$) температури $T(r,t)$

$$\begin{aligned}T_1(t) &= \sum_{\kappa=1}^2 \int_0^t W_1(t-\tau) \cdot B_1(p_m) e^{p_m \tau} d\tau, \\ T_2(t) &= \sum_{\kappa=1}^2 \int_0^t W_2(t-\tau) \cdot B_2(p_m) e^{p_m \tau} d\tau.\end{aligned}\quad (16)$$

Тут $A_1(p_\kappa)$, $A_2(p_\kappa)$, $B_1(p_m)$, $B_2(p_m)$ -вирази, що залежать від електро- та теплофізичних характеристик матеріалу циліндра та коренів p_κ і p_m характеристичних рівнянь систем (12), (13). Визначальні функції подаються у вигляді поліномів (10), коефіцієнти яких є лінійною комбінацією інтегральних характеристик цих функцій та їх граничних значень на поверхні циліндра, тобто:

$$\Phi(r,t) = \sum_{i=0}^3 [a_{i1}^\Phi \Phi_1(t) + a_{i2}^\Phi \Phi_2(t) + a_{i3}^\Phi \Phi^+(t)] r^i. \quad (17)$$

Тут $\Phi^+(t)$ - граничне значення визначальної функції на поверхні $r = R$ циліндра.

Для побудови розв'язку початково-крайової задачі (2)-(5) і (7)-(9) за дії неусталеного ЕМП вираз (1) підставляємо у формули (15) і знайдені вирази інтегральних характеристик $H_{zs}(t)$ функції підставляємо у формули (10). У результаті отримуємо вираз функції $H_z(r, t)$:

$$\frac{H_z(r_*, t)}{H_0} = \kappa \sum_{i=1}^4 \sum_{m=1}^2 \left\langle e^{-\beta_{1i} t} (A_{1im} \sin \omega t + A_{2im} \cos \omega t) + e^{-\beta_{2i} t} (A_{3im} \sin \omega t + A_{4im} \cos \omega t) + A_{5im} e^{p_m t} \right\rangle r_*^{i-1}. \quad (18)$$

Тут: A_{1im} , A_{2im} , A_{3im} подаються через вирази $A_1(p_\kappa)$, $A_2(p_\kappa)$; $r_* = r/R$ - безрозмірна радіальна координата. Після цього з допомогою формули (6) записуємо вираз тепла Джоуля:

$$\frac{Q(r_*, t)}{H_0^2} = \frac{\kappa^2}{\sigma R^2} \sum_{i=2}^4 \sum_{j=2}^4 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (i-1)(j-1) \varphi_{ijmn}(t) r_*^{i+j-4}. \quad (19)$$

Тут функція $\varphi_{ijmn}(t)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_{ijmn}(t) = & D_{1ijmn} e^{-2\beta_{1i} t} + D_{2ijmn} e^{-(\beta_{1i} + \beta_{2j}) t} + D_{3ijmn} e^{-2\beta_{2j} t} + D_{4ijmn} e^{(p_m + p_n) t} + \\ & + \sin 2\omega t [D_{5ijmn} e^{-2\beta_{1i} t} + D_{6ijmn} e^{-(\beta_{1i} + \beta_{2j}) t} + D_{7ijmn} e^{-2\beta_{2j} t}] + \\ & + \cos 2\omega t [D_{8ijmn} e^{-2\beta_{1i} t} + D_{9ijmn} e^{-(\beta_{1i} + \beta_{2j}) t} + D_{10ijmn} e^{-2\beta_{2j} t}] + \\ & + \sin \omega t [D_{11ijmn} e^{(p_m - \beta_{1i}) t} + D_{12ijmn} e^{(p_m - \beta_{2j}) t} + D_{13ijmn} e^{(p_n - \beta_{1i}) t} + D_{14ijmn} e^{(p_n - \beta_{2j}) t}] + \\ & + \cos \omega t [D_{15ijmn} e^{(p_m - \beta_{1i}) t} + D_{16ijmn} e^{(p_m - \beta_{2j}) t} + D_{17ijmn} e^{(p_n - \beta_{1i}) t} + D_{18ijmn} e^{(p_n - \beta_{2j}) t}]. \end{aligned} \quad (20)$$

Коефіцієнти $D_{1ijmn} \div D_{18ijmn}$ у формулі (19) записуються виразами:

$$\begin{aligned} D_{1ijmn} &= (A_{1im} A_{1jn} + A_{2im} A_{2jn})/2; \quad D_{2ijmn} = (A_{4im} A_{2jn})/2; \quad D_{3ijmn} = (A_{3im} A_{3jn} + A_{4im} A_{4jn})/2; \\ D_{4ijmn} &= A_{5im} A_{5jn}; \quad D_{5ijmn} = (A_{1im} A_{2jn} + A_{2im} A_{1jn})/2; \\ D_{6ijmn} &= (A_{3im} A_{2jn} + A_{4im} A_{1jn} + A_{1im} A_{4jn} + A_{2im} A_{3jn})/2; \\ D_{7ijmn} &= (A_{3im} A_{4jn} + A_{4im} A_{3jn})/2; \quad D_{8ijmn} = (A_{2im} A_{2jn} - A_{1im} A_{1jn})/2; \\ D_{9ijmn} &= (A_{4im} A_{2jn} - A_{3im} A_{1jn} - A_{1im} A_{3jn} + A_{2im} A_{4jn})/2; \\ D_{10ijmn} &= (A_{4im} A_{4jn} - A_{3im} A_{3jn})/2; \quad D_{11ijmn} = A_{5im} A_{1jn}; \quad D_{12ijmn} = A_{5im} A_{3jn}; \\ D_{13ijmn} &= A_{1im} A_{5jn}; \quad D_{14ijmn} = A_{3im} A_{5jn}; \quad D_{15ijmn} = A_{5im} A_{2jn}; \quad D_{16ijmn} = A_{5im} A_{4jn}; \\ D_{17ijmn} &= A_{2im} A_{5jn}; \quad D_{18ijmn} = A_{4im} A_{5jn}. \end{aligned}$$

Відповідно вирази $A_{ijn} \div A_{sin}$ отримуємо з виразів $A_{im} \div A_{sim}$ заміною індексів i на j та m на n . Підставляючи вираз (19) тепла Джоуля $Q(r,t)$ у формулу (15) з використанням виразів (16) інтегральних характеристик температури $T_s(t)$ ($s=1,2$) та виразу (10), отримуємо вираз температури $T(r,t)$ у стержні.

3. Комп'ютерний аналіз температурних режимів сталевго стержня за дії неусталеного електромагнітного поля.

Розрахунки проводилися для стержня радіуса $R=0,01\text{ m}$, виготовленого з легованої сталі X18H9T. Кругова частота ω несучих електромагнітних коливань неусталеного ЕМП приймалась рівною $\omega=6,28 \cdot 10^5\text{ rad/s}$. Час тривалості t_i дії неусталеного ЕМП вибрано рівним $t_i=10\text{ s}$, $t_i=60\text{ s}$, $t_i=120\text{ s}$. Результати числових досліджень подано на Рис. 1-5.

На Рис. 1 зображено зміну в часі температури T/H_0^2 у розглядуваному стержні за час тривалості $t_i=10\text{ s}$ дії неусталеного ЕМП. Обчислення виконано на поверхні стержня $r=R$ та на його серединній поверхні $r=R/2$.

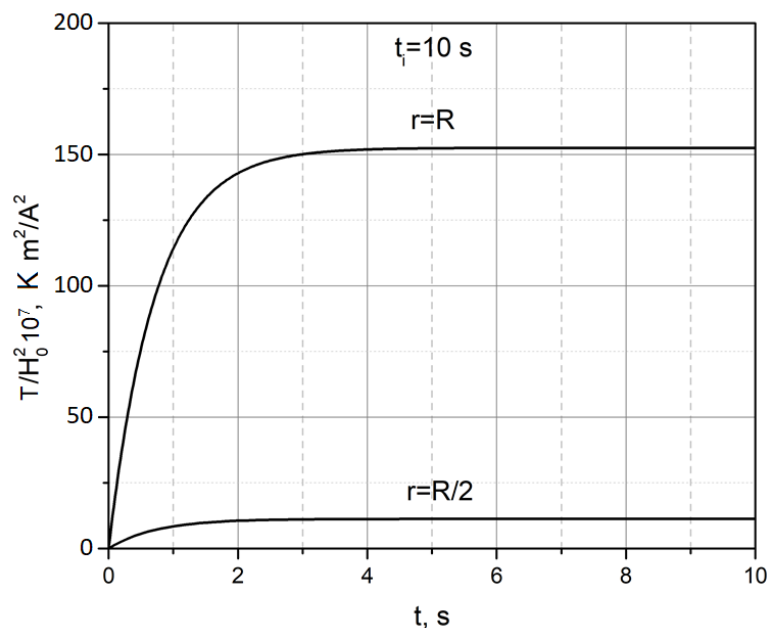


Рис. 1. Зміна в часі температури T/H_0^2 у сталевому стержні радіуса $R=0,01\text{ m}$ за час тривалості $t_i=10\text{ s}$ дії неусталеного ЕМП

Отримано, що за час тривалості $t_i = 10 \text{ s}$ дії неусталеного ЕМП вихід температури T/H_0^2 на максимальні значення на обох циліндричних поверхнях $r = R$ і $r = R/2$ відбувається приблизно за час $t = 5 \text{ s}$, тобто за час $t \approx 0.5t_i$.

Зміну в часі температури T/H_0^2 у даному стержні за часи тривалостей $t_i = 100 \text{ s}$ і $t_i = 200 \text{ s}$ дії неусталеного ЕМП зображено на Рис. 2. Суцільні лінії відповідають значенням температури T/H_0^2 , обчисленим за час $t_i = 60 \text{ s}$ дії неусталеного ЕМП. Штрихові лінії відповідають таким самим значенням, отриманим за час тривалості $t_i = 120 \text{ s}$.

Закономірності виходу температури на максимальні значення в обох розглядуваних випадках $t_i = 60 \text{ s}$ і $t_i = 120 \text{ s}$ співпадають із закономірностями, встановленими для $t_i = 10 \text{ s}$. Отже, вихід температури T/H_0^2 на максимальні значення, не залежно від тривалостей t_i дії неусталеного ЕМП відбувається за час $t = 0.5t_i$ на обох розглядуваних циліндричних поверхнях $r = R$ і $r = R/2$.

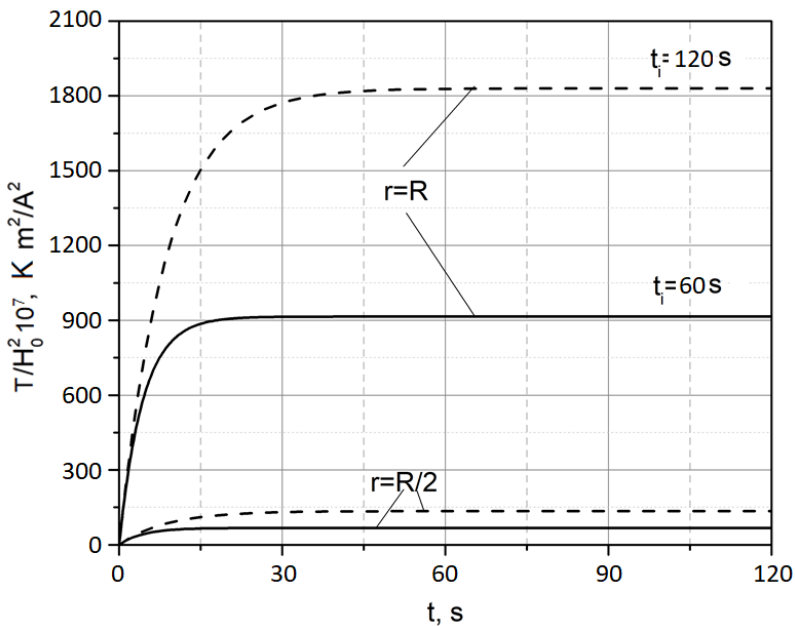


Рис. 2. Зміна в часі температури T/H_0^2 у сталевому стержні радіуса $R = 0.01 \text{ m}$ за часи тривалостей $t_i = 60 \text{ s}$ і $t_i = 120 \text{ s}$ дії неусталеного ЕМП

На Рис. 3 показано зміну температури T/H_0^2 по радіальній координаті сталевго циліндра за часи тривалостей $t_i = 10 \text{ s}$, $t_i = 60 \text{ s}$ і $t_i = 120 \text{ s}$ дії неусталеного ЕМП.

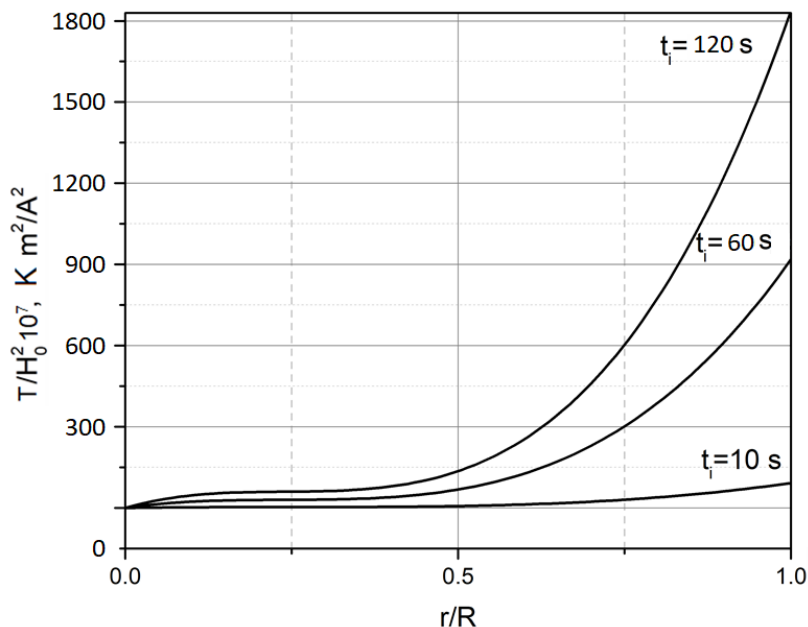


Рис. 3. Зміна температури T/H_0^2 по радіальній координаті сталевого стержня за часи тривалостей $t_i = 10 \text{ s}$, $t_i = 60 \text{ s}$ і $t_i = 120 \text{ s}$ дії неусталеного ЕМП

Залежності, приведені на Рис. 3 показують на суттєве зменшення максимального значення температури T/H_0^2 при віддаленні від циліндричної поверхні $r = R$ до циліндричної поверхні $r = R/2$ і стрімкому його зменшенні до нуля при прямуванні радіальної координати до осі стержня $r = 0$. Це означає, що за частоти $\omega = 6.28 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$ несучих електромагнітних коливань характер розподілу температури T/H_0^2 по радіальній координаті близький до приповерхневого.

На основі аналізу Рис. 1-3 встановлено, що за розглядуваних тривалостей $t_i = 10 \text{ s}$, $t_i = 60 \text{ s}$ і $t_i = 120 \text{ s}$ дії неусталеного ЕМП максимальне значення температури T/H_0^2 на поверхні $r = R$ приблизно в 15 разів перевищує його значення на циліндричній поверхні $r = R/2$.

На Рис. 4 зображено залежність температури T у сталевому стержні від величини H_0 напруженості магнітного поля за часи тривалостей $t_i = 10 \text{ s}$, $t_i = 60 \text{ s}$ і $t_i = 120 \text{ s}$ дії неусталеного ЕМП. Розглянуто діапазон зміни величини H_0 , рівний $H_0 = 10^3 \div 10^4 \text{ A/m}$.

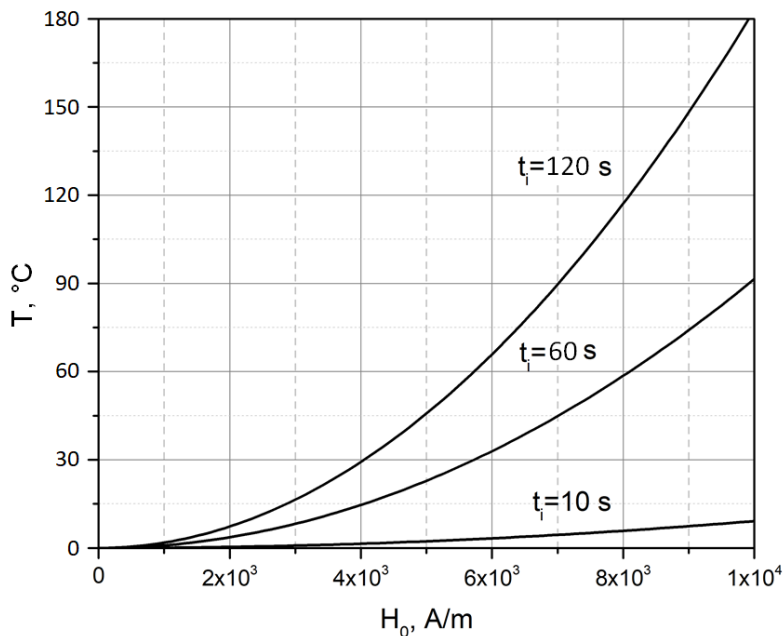


Рис. 4. Залежність температури T у сталевому стержні від величини H_0 напруженості магнітного поля за часи тривалостей $t_i = 10$ s, $t_i = 60$ s і $t_i = 120$ s дії неусталеного ЕМП

Встановлено, що за використовуваних часів тривалості дії неусталеного ЕМП отримані величини температури T у розглядуваному сталевому стержні відповідають її значенням в інтервалі $(15 \div 180) ^\circ\text{C}$.

Висновки. Запропонована фізико-математична модель дає змогу дослідити закономірності температурних режимів електропровідних циліндричних стержнів, виготовлених з неферомагнітних матеріалів, за дії неусталеного ЕМП.

Розвинуто методику визначення осової компоненти вектора напруженості магнітного поля і температури у електропровідному неферомагнітному циліндрі. Дана методика ґрунтується на апроксимації розподілів визначальних функцій за радіальною координатою циліндра кубічними поліномами. Коефіцієнти цих поліномів подано у вигляді виразів, що відповідають інтегральним по радіальній координаті циліндра характеристикам визначальних функцій і їх значень на поверхні циліндра. Вирази визначальних функцій отримано без використання функцій Бесселя та функціональних рядів стосовно цих функцій, що суттєво спрощує їх числовий аналіз.

Проаналізовано температурні режими електропровідного стержня, виготовленого з нержавної сталі за його індукційної термообробки неусталеним ЕМП. Результати проведених досліджень є науковою основою для прогнозування температурних режимів неферомагнітних стержнів при їх технологічній термообробці неусталеним ЕМП.

Література

1. Батыгин Ю.В. Магнитно-импульсная обработка тонкостенных металлов / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский. - Харьков: МОСТ- Торнадо, 2002.- 288 с.
2. Batygin, Y., Chaplygin, E., Shinderuk, S., & Volosyuk, M. (2022). Induction Heating during Magnetic Pulse Processing of Metals: Perspective Schemes and their Application. *Lighting Engineering & Power Engineering*, 61(2), 49–54. <https://doi.org/10.33042/2079-424X.2022.61.2.02>
3. Asai S. *Electromagnetic Processing of Materials*. Springer, Netherlands (2012).
4. Rudnev, V.; Loveless, D.; Cook, R. *Handbook of Induction Heating*; CRC Press: London, UK; Taylor and Francis Group: Abingdon, UK, 2018.
5. Bobart, G.F. Induction heating. *AccessScience*. 2020.
6. Lucia O., Maussion P., Dede E.J., Burdío J.M., (2014) *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61 (5), P. 2509-2520. DOI: 10.1109/TIE.2013.2281162
7. Musii, R.; Pukach, P.; Kohut, I.; Vovk, M.; Šlahor, L. Determination and Analysis of Joule's Heat and Temperature in an Electrically Conductive Plate Element Subject to Short-Term Induction Heating by a Non-Stationary Electromagnetic Field. // *Energies*. – 2022. – Vol. 15, iss. 525.
8. Musii R., Pukach P., Melnyk N., Vovk M., Šlahor L. Modeling of the temperature regimes in a layered bimetallic plate under short-term induction heating // *Energies*. – 2023. – Vol. 16, iss. 13.
9. Musii R., Melnyk N., Drohomiretska K., Melnyk M. Investigation of the heating regimes of a steel strip by a quasi-steady electromagnetic field // *Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory : proceedings of 2023 IEEE XXVIIIth International seminar/workshop DIPED-2023 (Tbilisi, September 11-13, 2023)*. – 2023. – С. 229–232.
10. Мусій Р. С., Мельник Н. Б., Бандирський Б. Й., Свідрак І. Г. Математичне моделювання та аналіз теплових режимів сталевго валу за його індукційної термообробки // *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології : науковий збірник*. – 2024. – Вип. 39. – С. 144–155.

Study of temperature regimes of a steel rod under the action of an unsteady electromagnetic field

Natalia Melnyk, Roman Musii, Nadiia Tymoshenko, Adrian Torsky

A physical and mathematical model is proposed for determining the temperature field in a steel rod under the action of an unsteady electromagnetic field. This model is described by sequentially coupled Maxwell equations and Fourier equations of thermal conductivity. It consists of two stages: determining the axial component of the magnetic field strength vector and temperature. The initial relations of the initial-boundary problems of electrodynamics and thermal conductivity for the rod under consideration are recorded. To construct their solutions, a cubic approximation of the distribution of determining functions along the radial coordinate is used. As a result, the initial-boundary problems for determining functions are reduced to Cauchy problems with time variation for the integral characteristics of determining functions along the radial variable. General solutions of Cauchy problems are recorded using the Laplace integral transform. The coefficients of the approximation polynomials are given in the form of a linear combination of integral characteristics and determining functions on the rod surface. The expressions for Joule heat and temperature in the rod under consideration under the action of an unsteady electromagnetic field are obtained. A numerical analysis is performed to investigate the change in temperature over time and its distribution across the radius of the rod, depending on the duration of the unsteady electromagnetic field and the magnitude of the magnetic field strength.

Keywords: steel rod, unsteady electromagnetic field, axial component of the magnetic field strength vector, Joule heat, temperature.

Отримано 19. 12. 2025