

Математичне моделювання та аналіз температурних режимів вольфрамової смуги за дії квазіусталеного електромагнітного поля

Роман Мусій¹, Мирослава Клапчук², Богдан Бандирський³, Оксана Орищин⁴

¹д. ф.-м. н., професор, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: roman.s.musij@lpnu.ua

²к. ф.-м. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: myroslava.i.klapchuk@lpnu.ua

³к. ф.-м. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: bohdan.y.bandyrskiy@lpnu.ua

⁴к. ф.-м. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: oksana.g.oryshchyn@lpnu.ua

Розглянуто фізико-математичну модель для визначення питомої густини тепла Джоуля у вольфрамовій смугі та температурного поля за її індукційної термообробки квазіусталеним електромагнітним полем. Записано вихідні співвідношення двовимірних початково-крайових задач електродинаміки та теплопровідності для розглядуваної смуги. За визначальні функції вибрано дотичну до основ смуги компоненту вектора напруженості магнітного поля і температури. З використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом та подвійних інтегральних перетворень за товщиною і поперечною координатами знаходяться вирази дотичної компоненти вектора напруженості магнітного поля, тепла Джоуля та температури. Чисельно проаналізовано зміну в часі температури у характерних точках поперечного перерізу на перехідному режимі та по всьому поперечному перерізу смуги в усталеному режимі для двох типів приповерхневого та суцільного індукційного нагріву однорідним квазіусталеним електромагнітним полем.

Ключові слова: вольфрамова смуга, квазіусталене електромагнітне поле, дотична компонента вектора напруженості магнітного поля, тепло Джоуля, температура, приповерхневий та суцільний індукційний нагрів.

Вступ. У багатьох електротехнічних, енергетичних пристроях та у двигунах внутрішнього згорання використовують в якості конструктивних елементів вольфрамові смуги. Для їх технологічної термообробки використовують нестационарні електромагнітні поля (ЕМП) різних типів, залежно від характеру їх змін у часі, зокрема, квазіусталені ЕМП. Такі ЕМП забезпечують врахування моментів включення струму в індукційних системах з подальшим виходом на усталений режим індукційного нагріву електропровідних елементів.

Опис електромагнітних процесів, що виникають у електропровідних елементах під дією ЕМП, наведено в праці [1]. Основні закономірності індукційного нагрівання таких елементів усталеними ЕМП розглянуто в роботі [2]. Різні

аспекти нагрівання електропровідних матеріалів вихровими струмами, що індукуються зовнішніми усталеними та квазіусталеними ЕМП, викладено в роботі [3]. В роботі [4] розглянуто поєднаний напіваналітичний підхід для моделювання процесу індукційного нагрівання.

Дослідження тепла Джоуля в нанодроті під час протікання струму описано в праці [5]. Роботи [6, 7] присвячені визначенню та аналізу тепла Джоуля і температури в одношарових і двошарових пластинчастих неферомагнітних електропровідних елементах, що піддаються короточасному індукційному нагріву неусталеним ЕМП. Дослідження режимів нагріву сталевого стержня з мідним покриттям квазіусталеним електромагнітним полем наведено в праці [8]. Проте дослідження теплових процесів у вольфрамових смугах, які часто використовуються як структурні елементи багатьох електротехнічних та теплотехнічних пристроїв, є важливим інженерним завданням і потребує додаткового вивчення.

У даній роботі на основі двовимірної фізико-математичної моделі запропоновано визначення тепла Джоуля і температури у вольфрамовій смугі та проведено числовий аналіз температурних режимів такої смуги під час її технологічної індукційної термообробки за допомогою квазіусталеного ЕМП.

1. Двовимірна фізико-математична модель.

Розглядається електропровідна смуга прямокутного перерізу, яка зазнає дії зовнішнього нестационарного ЕМП, зокрема квазіусталеного. Унаслідок явища електромагнітної індукції у смугі виникають індукційні струми, протікання яких створює тепло Джоуля і відповідний розподіл температурного поля. Матеріал смуги однорідний, ізотропний і неферомагнітний, а його електрофізичні параметри приймаються сталими.

Смуга віднесена до Декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ (рис.1), початок якої точка O співпадає з центром симетрії прямокутника.

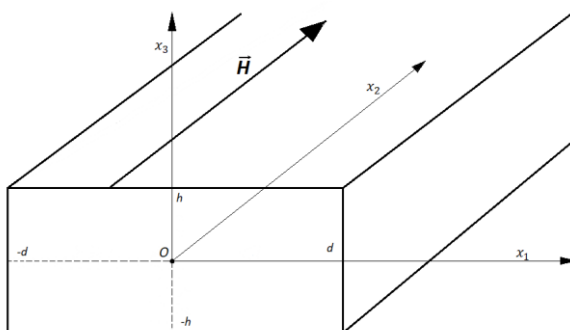


Рис. 1. Вольфрамова смуга прямокутного перерізу

Ширина смуги орієнтована вздовж осі Ox_1 , довжина - вздовж осі Ox_2 , товщина - вздовж осі Ox_3 . Розглядається нескінченно довга смуга з прямокутним поперечним перерізом, де товщина $2h$ і ширина $2d_*$.

Введемо безрозмірні координати, поділивши просторові координати на півтовщину смуги h :

$$x_1 = \frac{x_1}{h}, \quad x_3 = \frac{x_3}{h}.$$

Тут x_1 і x_3 - безрозмірні поперечна і товщинна координати. Дія зовнішнього квазіусталеного ЕМП задається значеннями компоненти $H_2(x_1, x_3, t)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}(x_1, x_3, t) = \{0; H_2(x_1, x_3, t); 0\}$ на всіх чотирьох гранях смуги, які описуються виразами: $x_3 = \pm 1$, $x_1 = \pm d$. Тут t - час, $d = d_*/h$.

1.1. Визначення електромагнітного поля

Для визначення функції $H_2(x_1, x_3, \tau)$ у смугі на основі співвідношень Максвелла [1] отримуємо рівняння:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) H_2 - \frac{\partial H_2}{\partial \tau} = 0. \quad (1)$$

Тут $\tau = \frac{t}{\sigma \mu h^2}$ - безрозмірний час, характерний для дифузії магнітного поля через півтовщину h смуги; σ - коефіцієнт електропровідності, μ - магнітна проникливість матеріалу смуги.

Рівняння (1) розв'язуємо за граничних умов:

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau) \quad (2)$$

$$H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau).$$

Умови (2) відповідають заданню значень функції $H_2(x_1, x_3, \tau)$ на всіх гранях $x_3 = \pm 1$ та $x_1 = \pm d$ смуги. Тут $H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau)$ і $H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau)$ задані вирази функції $H_2(x_1, x_3, \tau)$, відповідно, на гранях $x_3 = \pm 1$, $x_1 = \pm d$.

Початкова умова на функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ в момент часу $\tau = 0$ має вигляд:

$$H_2(x_1, x_3, 0) = 0. \quad (3)$$

За відомою функцією $H_2(x_1, x_3, \tau)$, згідно співвідношень Максвелла, визначаємо вектор напруженості електричного поля

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} (\text{rot} \vec{H}). \quad (4)$$

Відповідно до структури вектора $\vec{H}(x_1, x_3, \tau) = \{0; H_2(x_1, x_3, \tau); 0\}$ вектор $\vec{E}$ на основі виразу (4) має дві компоненти $E_1(x_1, x_3, \tau)$ і $E_3(x_1, x_3, \tau)$, тобто

$$\vec{E}(x_1, x_3, \tau) = \{E_1(x_1, x_3, \tau); 0; E_3(x_1, x_3, \tau)\}.$$

Функції $E_1(x_1, x_3, \tau)$ і $E_3(x_1, x_3, \tau)$ через компоненту $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектора $\vec{H}$ описуються виразами:

$$E_1 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_3}, \quad E_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_1}. \quad (5)$$

Зауважимо, що крім граничних умов (2) в кутових точках прямокутника поперечного перерізу смуги повинні виконуватись також умови узгодження функцій $H_2^{\pm(0)}$ і $H_2^{\pm(0)*}$, а саме:

$$\begin{aligned} H_2^{+(0)}(d, \tau) &= H_2^{+(0)*}(1, \tau), \quad H_2^{-(0)}(d, \tau) = H_2^{-(0)*}(-1, \tau), \\ H_2^{+(0)}(-d, \tau) &= H_2^{-(0)*}(1, \tau), \quad H_2^{-(0)}(-d, \tau) = H_2^{+(0)*}(-1, \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

На другому етапі за знайденими виразами векторів напр. уженостей $\vec{H}$ магнітного і $\vec{E}$ електричного полів визначаємо тепло Джоуля за формулою $Q = \sigma \vec{E} \vec{E}$, яка через компоненти вектора $\vec{E}$ має вигляд:

$$Q = E_1^2(x_1, x_3, \tau) + E_3^2(x_1, x_3, \tau). \quad (7)$$

Відповідно через функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вираз тепла Джоуля записується таким чином:

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left[\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

1.2. Визначення температурного поля

Температурне поле $T(x_1, x_3, Fo)$, яке зумовлене теплом Джоуля Q , описується рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} + (\Delta_1 - \frac{\partial}{\partial Fo})T = -\frac{h^2}{\lambda} Q. \quad (9)$$

Тут $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$; $Fo = \frac{at}{h^2}$ – критерій Фур'є; a і λ – коефіцієнти температуро- і теплопровідності.

На поверхнях смуги $x_3 = \pm 1$ виконуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^{\pm} \pm Bi^{\pm} (T^{\pm} - T_c^{\pm}) = 0. \quad (10)$$

Тут $Bi_i^{\pm} = H^{\pm} h$ – критерій Біо; $H^{\pm}$ – відносний коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь $x_3 = \pm 1$; $T^{\pm}$ і $\left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^{\pm}$ – значення температури і її похідної на поверхнях $x_3 = \pm 1$; $T_c^{\pm}$ – температури зовнішніх середовищ, які контактують із поверхнями $x_3 = \pm 1$ ($T_c^{\pm}(x_1, x_2, 0) = T_c^{(0)}(x_1, x_2, 0)$); $T_c^{(0)}$ – початкова температура зовнішнього середовища.

Умови, аналогічні до умов (10), мають місце також на торцевих поверхнях $x_1 = \pm d$ смуги. Значення температури T у початковий момент часу $Fo = 0$ є відомим і рівне

$$T(x_1, x_2, x_3, 0) = T_c^{(0)}(x_1, x_2, 0). \quad (11)$$

2. Методика розв'язування початково-крайових задач

Початково-крайові задачі (1)–(4) і (9)–(11) стосовно визначальних функцій $\Phi = \{H_2(x_1, x_3, t); T(x_1, x_3, t)\}$ будемо розв'язувати використовуючи апроксимацію їх розподілів по товщинній змінній x_3 кубічними поліномами [7]

$$\Phi(x_1, x_3, t) = \sum_{j=1}^3 a_{(j-1)}^{\Phi}(x_1, t) x_3^{j-1}. \quad (12)$$

Коефіцієнти $a_{(j-1)}^{\Phi}(x_1, t)$ апроксимаційних поліномів (12) записуємо через інтегральні характеристики $\Phi_s(x_1, t)$ визначальних функцій $\Phi(x_1, x_3, t)$:

$$\Phi_s(x_1, t) = \frac{2s-1}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x_1, x_3, t) x_3^{s-1} dx_3, \quad (s = 1, 2) \quad (13)$$

і задані граничні значення $\Phi^{\pm}(x_1, t)$ цих функцій на основах $x_3 = \pm h$ смуги. Рівняння для визначення інтегральних характеристик $\Phi_s(x_1, t)$ отримуємо множенням рівнянь (1) і (9) на x_3^{s-1} та їх інтегруванням по змінній x_3 з врахуванням формул (12) і (13).

Система рівнянь на інтегральні характеристики $H_{2s}(x_1, t)$ ($s = 1, 2$) функції $H_2(x_1, x_3, t)$ має вигляд:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right) H_{21} - 3H_{22} = \frac{3}{2}(H_2^+ + H_2^-);$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right) H_{22} - 15H_{21} = \frac{15}{2}(H_2^+ - H_2^-). \quad (14)$$

Відповідно система рівнянь на інтегральні характеристики $T_s(x_1, t)$, ($s = 1, 2$) температури $T(x_1, x_3, t)$ записується так:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial Fo}\right) T_1 - 3T_1 = -W_1 - \frac{3}{2}(T_c^+ + T_c^-);$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial Fo}\right) T_2 - 15T_2 = -W_2 - \frac{15}{2}(T_c^+ - T_c^-). \quad (15)$$

Тут $W_s = \frac{h^2}{\lambda} \frac{2S-1}{2} \int_{-1}^1 Q_{x_3^{s-1}} dx_3$ ($s=1, 2$) – інтегральні характеристики джерел тепла

Джоуля Q .

Отримані системи вихідних рівнянь (14) – (15) для знаходження інтегральних характеристик $\Phi_s(x_1, t)$ ($s = 1, 2$) визначальних функцій є системами одновимірних рівнянь за просторовою змінною x_1 . Для знаходження їх розв'язків використовуємо скінченні інтегральні перетворення [7] по змінній x_1 відповідно до заданих на визначальні функції крайових умов на бічних гранях $x_1 = \pm d$ розглядуваної смуги та інтегральне перетворення Лапласа за безрозмірними часовими змінними τ і Fo .

3. Числовий аналіз температурних режимів вольфрамової смуги за її індукційного нагріву

Розглядаємо індукційний нагрів вольфрамової смуги однорідним квазіусталеним ЕМП. Відповідно значення компоненти вектора напруженості магнітного поля на основах $x_3 = \pm 1$ і торцевих перетинах $x_1 = \pm d$ смуги задаються виразами:

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_0 \varphi(\tau) e^{ib\tau}; \quad H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_0 \varphi(\tau) e^{ib\tau}. \quad (16)$$

При цьому граничні умови узгодження значень функцій $H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau)$ і $H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau)$ та умови спряження значень функцій $\Psi(x_1, \tau)$ і $\sigma_{13}(x_1, \tau)$ у кутових точках поперечного перерізу смуги виконуються тотожно.

У виразах (16) функція $\varphi(\tau)$ має вигляд $\varphi(\tau) = 1 - e^{\beta\tau}$, де $i = \sqrt{-1}$; $b = 1/(2\delta_0^2)$; $\delta_0 = (2\omega\sigma\mu h^2)^{-1/2}$ - параметр, що визначає відносну до півтовщини смуги h глибину проникання індукційних струмів частоти ω ; $\beta = \ln\varepsilon/\tau_*$; τ_* -

безрозмірний час, що відповідає виходу електромагнітних коливань частоти ω на усталений режим з амплітудою H_0 ; $\varepsilon = 0.001$.

Дослідження здійснено для вольфрамової смуги товщиною $2h = 2 \text{ mm}$ і шириною $2d_* = 40 \text{ mm}$, тобто $d = 20$.

Чисельні експерименти для розглядуваної смуги за її індукційного нагріву квазіусталеним ЕМП виконано для двох значень параметра δ_0 : $\delta_0 = 0.1$ – приповерхневий та $\delta_0 = 1$ – суцільний нагрів. Обчислення проведено у таких точках $M_1 (0.25 d, 0.25)$, $M_2 (0.5 d, 0.5)$, $M_3 (0.9 d, 0.9)$ поперечного перерізу смуги. Кругова частота електромагнітних коливань у першому випадку $\omega_1 = 2.2 \cdot 10^6 \text{ 1/s}$ відповідає радіочастотному діапазону, а у другому випадку частота $\omega_2 = 2.2 \cdot 10^4 \text{ 1/s}$ відповідає діапазону промислових частот для суцільного індукційного нагріву електропровідних елементів.

Результати обчислень представлені на рис. 2-5 при значенні критерію Біо $Bi = 1$. На рис. 2, 3 подано залежності температури від безрозмірного часу F_0 . Рис. 2 відповідає значенню параметра $\delta_0 = 0.1$, а рис. 3 – значенню параметра $\delta_0 = 1$.

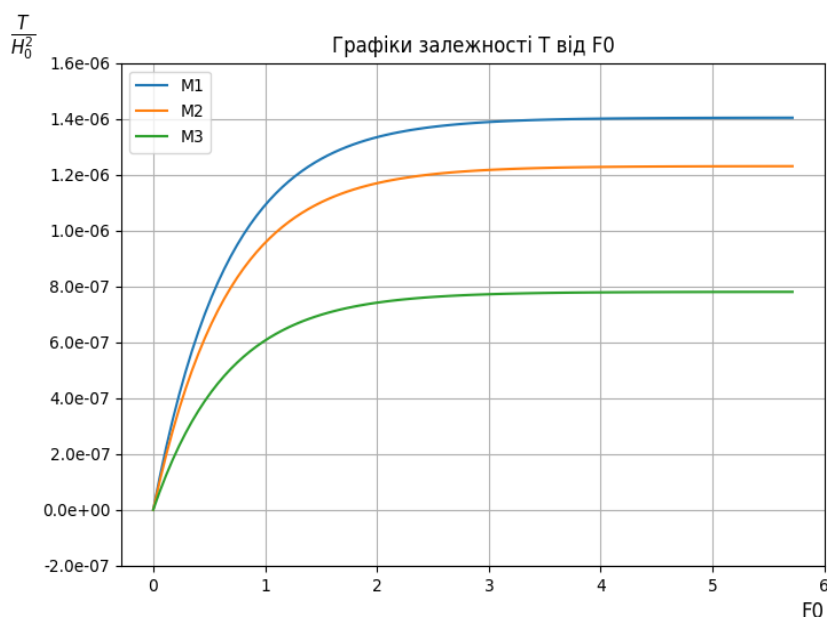


Рис. 2. Зміна в часі F_0 температури T/H_0^2 у вольфрамовій смугі у точках поперечного перерізу $M_1 (0.25 d, 0.25)$, $M_2 (0.5 d, 0.5)$, $M_3 (0.9 d, 0.9)$ за критерію Біо $Bi=1$ і приповерхневого нагріву при $\delta_0 = 0.1$

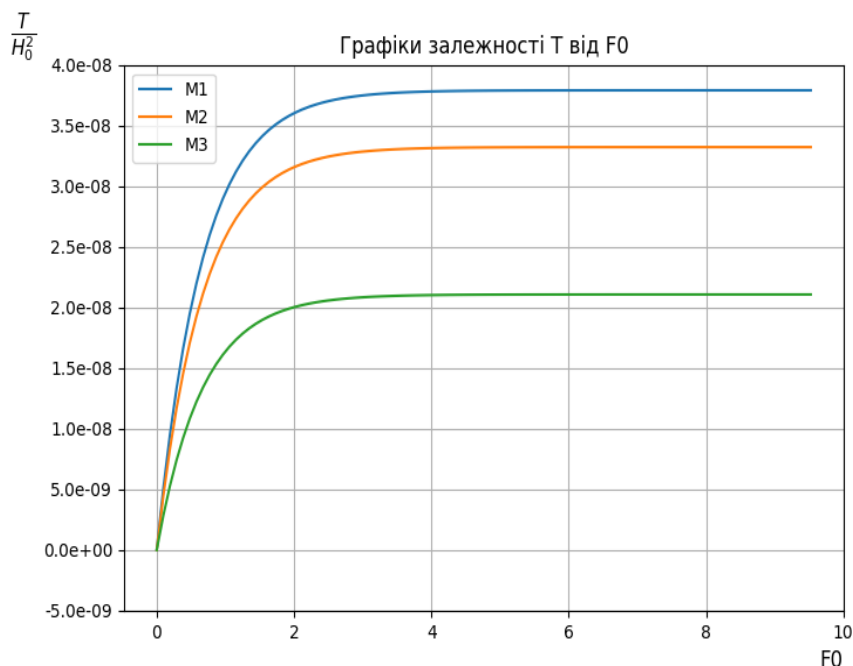


Рис. 3. Зміна в часі Fo температури T/H_0^2 у вольфрамовій смугі у точках поперечного перерізу M_1 (0.25 d, 0.25), M_2 (0.5 d, 0.5), M_3 (0.9 d, 0.9) за критерію $Bio\ Bi=1$ і суцільного нагріву при $\delta_0 = 1$

На основі аналізу залежностей, приведених на рис. 2 і рис. 3, встановлено, що вихід температури T/H_0^2 на усталений режим (досягнення її максимальних значень) відбувається в моменти безрозмірного часу $Fo \geq 4$, за обох розглядуваних режимів індукційного нагріву. Встановлено, що максимальні значення температури T/H_0^2 досягаються у точці M_1 (0.25 d, 0.25), а мінімальні значення – у точці M_3 (0.9 d, 0.9) поперечного перерізу смуги.

На рис.4 і рис. 5 зображено 3d-графіки розподілу температури T/H_0^2 по площі поперечного перерізу вольфрамової смуги в момент часу $Fo \geq 4$ за обох розглядуваних режимів індукційного нагріву.

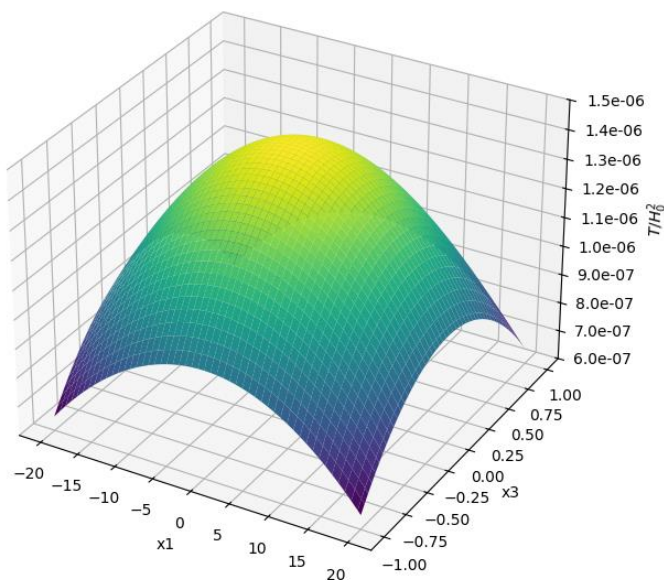


Рис. 4. Розподіл температури T/H_0^2 по площі поперечного перерізу вольфрамової смуги в моменти часу $Fo \geq 4$ у випадку приповерхневого ($\delta_0 = 0.1$) індукційного нагріву

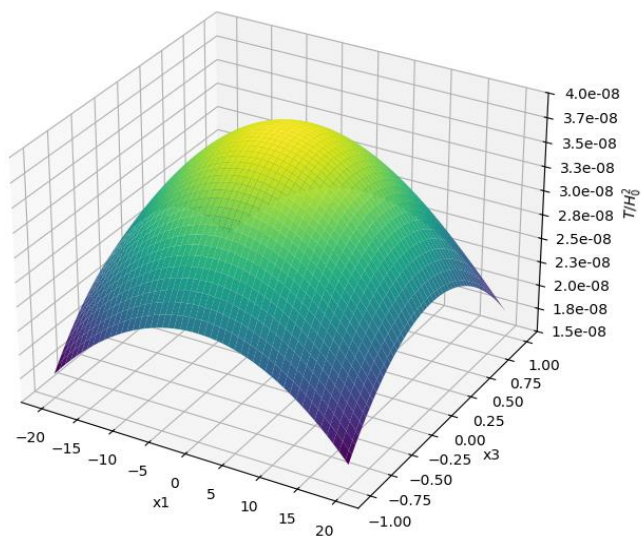


Рис. 5. Розподіл температури T/H_0^2 по площі поперечного перерізу вольфрамової смуги в моменти часу $Fo \geq 4$ у випадку суцільного ($\delta_0 = 1$) індукційного нагріву.

З аналізу рис. 4, 5 випливає, що розподіл температури T/H_0^2 по площі поперечного перерізу вольфрамової смуги в обох розглядуваних випадках приповерхневого і суцільного індукційного нагріву в усталеному режимі має

однаковий якісний характер. Числові значення температури T/H_0^2 при цьому відрізняються приблизно у 35-40 разів.

Висновки. Вихідні двовимірні початково-крайові задачі стосовно визначальних функцій зведено до одновимірних початково-крайових задач на їх інтегральні характеристики. Для цього використано апроксимації розподілів компоненти вектора напруженості магнітного поля і температури по товщинній координаті смуги прямокутного поперечного перерізу кубічними поліномами.

Вирази інтегральних характеристик отримано з використанням скінченного інтегрального перетворення по поперечній координаті та інтегрального перетворення Лапласа за часовими змінними.

Запропонована методика знаходження визначальних функцій суттєво спрощує аналітичні розв'язки сформульованих двовимірних початково-крайових задач для їх комп'ютерного аналізу.

Виявлені закономірності зміни в часі та розподілу температури по поперечному перерізу вольфрамової смуги мають важливе теоретичне і прикладне значення для прогнозування температурних режимів пластинчастих елементів при їх технологічній термообробці з допомогою індукційного нагріву квазіусталеним ЕМП.

Література

1. Asai S. Electromagnetic Processing of Materials. Springer, Netherlands (2012).
2. Rudnev, V.; Loveless, D.; Cook, R. Handbook of Induction Heating; CRC Press: London, UK; Taylor and Francis Group: Abingdon, UK, 2018.
3. Bobart, G.F. Induction heating. AccessScience. 2020.
4. Areitioaurtena, M., Segurajauregi, U., Akujärvi, V. et al. A semi-analytical coupled simulation approach for induction heating. Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci. 8, 14 (2021).
5. Gantsevich, S.; Gurevich, V. Joule heat release during current flow through a nanowire. Phys. Solid State 2016, 58, 1711–1715.
6. Musii, R.; Pukach, P.; Kohut, I.; Vovk, M.; Šlahor, L. Determination and Analysis of Joule's Heat and Temperature in an Electrically Conductive Plate Element Subject to Short-Term Induction Heating by a Non-Stationary Electromagnetic Field. Energies 2022, 15, 525
7. Musii R., Pukach P., Melnyk N., Vovk M., Šlahor L. Modeling of the temperature regimes in a layered bimetallic plate under short-term induction heating // Energies. – 2023. – Vol. 16, iss. 13.
8. Musii, R., Klapchuk, M., Goshko, L., Sydorchuk, O., Shayner, H., & Shnyder, V. (2023, September). Computer analysis of the thermoelastic behavior of a steel rod with a thin copper coating during pulse electromagnetic action. In 2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED) (Vol. 1, pp. 225-228). IEEE.

Mathematical Modeling And Analysis Of Temperature Regimes of A Tungsten Strip Under The Action Of A Quasi-Steady Electromagnetic Field

Roman Musii, Myroslava Klapchuk, Bohdan Bandytskyi,
Oksana Oryshchyn

A physical and mathematical model for determining the specific Joule heat density in a tungsten strip and the temperature field during its induction heat treatment by a quasi-steady electromagnetic field is considered. The initial relations of the two-dimensional initial-boundary value problems of electrodynamics and thermal conductivity for the strip under consideration are formulated. The tangential component of the magnetic field vector and the temperature vector tangent to the strip bases are chosen as the determining functions. Using the Laplace integral transform in time and double integral transforms in the thickness and transverse coordinates, expressions for the tangential component of the magnetic field vector, Joule heat, and temperature are found. The change in temperature over time at characteristic points of the cross section in the transition mode and over the entire cross section of the strip in the steady mode for two types of near-surface and in-depth induction heating by a homogeneous quasi-steady electromagnetic field is numerically analyzed.

Keywords: tungsten panel, quasi-steady electromagnetic field, tangential component of the magnetic field intensity vector, Joule heat, temperature, near-surface and in-depth induction heating.

Отримано 17. 12. 2025