

**Визначення та аналіз тепла Джоуля і пондеромоторної сили у суцільному мідному циліндрі за дії електромагнітного імпульсу**

Андрій Кунинець<sup>1</sup>, Роман Мусій<sup>2</sup>, Богдан Бандирський<sup>3</sup>, Галина Івасик<sup>4</sup>

<sup>1</sup>к. ф.-м. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: andrii.v.kunynets@lpnu.ua

<sup>2</sup>д. ф.-м. н., професор, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: roman.s.musij@lpnu.ua

<sup>3</sup>к. ф.-м. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: bohdan.y.bandyrskyi@lpnu.ua

<sup>4</sup>к. ф.-м. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: halyna.v.ivasyk@lpnu.ua

*Сформульовано початково-крайову задачу електродинаміки для суцільного електропровідного циліндра, який знаходиться за дії електромагнітного імпульсу. Дія такого імпульсу проявляється двома фізичними чинниками – теплом Джоуля та пондеромоторною силою. Для знаходження їх виразів спочатку необхідно визначити осьову компоненту вектора напруженості магнітного поля з розв’язку сформульованої задачі електродинаміки, а потім записати вирази питомої густини тепла Джоуля і пондеромоторної сили у розглядуваному циліндрі. Для знаходження розв’язку задачі електродинаміки використано кубічну апроксимацію розподілу осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля по радіальній змінній. У результаті вихідна початково-крайова задача на визначальну функцію зведена до задачі Коші за часовою змінною на інтегральні характеристики визначальної функції за радіальною змінною. Розв’язок задачі Коші отримано з використанням інтегрального перетворення Лапласа і записано вирази інтегральних характеристик та осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля. На основі отриманих за нестационарної електромагнітної дії загальних розв’язків вихідної початково-крайової задачі записано вирази визначальної функції, питомої густини тепла Джоуля і пондеромоторної сили у розглядуваному циліндрі за дії електромагнітного імпульсу. Виконаний числовий аналіз зміни в часі та розподілу по радіусу циліндра осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля та фізичних чинників – тепла Джоуля і пондеромоторної сили залежно від часу тривалості електромагнітного імпульсу.*

**Ключові слова:** суцільний мідний циліндр, електромагнітний імпульс, осьова компонента вектора напруженості магнітного поля, тепло Джоуля, пондеромоторна сила.

**Вступ.** У багатьох електротехнічних, енергетичних пристроях та у автомобільних та авіа системах в якості конструктивних елементів використовують мідні циліндричні стержні. Для їх технологічної імпульсної обробки з метою зміцнення використовують електромагнітні імпульси (ЕМІ) різної тривалості. Для інженерного розрахунку міцності та довготривалості розглядуваних стержнів необхідно мати аналіз тепла Джоуля і пондеромоторної сили залежно від часових параметрів ЕМІ.

Фізичні і технічні особливості електротехнічних систем, що створюють ЕМІ описано в роботах [1-3]. Опис електромагнітних процесів, що виникають у електропровідних елементах під дією ЕМІ, розглянуто в праці [4]. Основні закономірності магнітно-імпульсної обробки електропровідних матеріалів та перспективи застосування імпульсних електромагнітних полів для сучасних технологій викладено в роботах [5-7].

Дослідження тепла Джоуля в нанодроті під час протікання струму описано в праці [8]. Роботи [9, 10] присвячені визначенню та аналізу тепла Джоуля і температури в одношарових і двошарових пластинчастих електропровідних елементах, що піддаються короткочасному індукційному нагріву неусталеним ЕМП. Дослідження режимів нагріву сталевोї смуги прямокутного перерізу під дією квазіусталеного електромагнітного поля на основі двовимірної нестационарної моделі наведено в праці [10]. Проте дослідження тепла Джоуля і пондеромоторної сили для аналізу теплових і механічних процесів у електропровідних тілах циліндричної геометрії, зокрема, суцільному циліндрі, яке є важливим інженерним завданням, потребує додаткового вивчення.

У даній роботі сформульовано вихідні співвідношення для визначення тепла Джоуля і пондеромоторної сили у електропровідному суцільному циліндрі. На їх основі досліджено зміну в часі і по радіальній координаті тепла Джоуля і пондеромоторної сили у мідному циліндричному стержні під час його технологічної електромагнітної обробки ЕМІ.

## **1. Вихідні співвідношення**

Розглядається електропровідний стержень, віднесений до циліндричної системи координат  $O\varphi z$ . Вісь  $Oz$  співпадає з віссю симетрії стержня, радіус якого рівний  $R$ . Даний стержень моделюємо суцільним циліндром. Матеріал циліндра однорідний, ізотропний, неферомагнітний. Його електрофізичні параметри – коефіцієнт електропровідності  $\sigma$  та магнітна проникливість  $\mu$  приймаються сталими.

Циліндр підлягає технологічній імпульсній обробці, яка здійснюється із застосуванням ЕМІ. Дію ЕМІ математично описуємо таким виразом

$$H_{z0}(t) = kH_0(\exp(-\beta_1 t) - \exp(-\beta_2 t)). \quad (1)$$

Тут  $H_{z0}(t)$  – значення осьової компоненти  $H_z(r, t)$  вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H} = \{0; 0; H_z(r, t)\}$  на поверхні циліндра радіуса  $R$ ;  $H_0$  – максимальне значення напруженості магнітного поля створюваного ЕМІ;  $\beta_1, \beta_2$  – параметри, що характеризують часи фронтів наростання і спадання ЕМІ;  $k$  – нормувальний множник,  $t$  – час.

Дія ЕМП зумовлює виникнення у циліндрі об'ємно розподілених нестационарних джерел тепла Джоуля  $Q$  і пондеромоторної сили  $\vec{F} = \{F_r(r, t); 0; 0\}$ . Для визначення цих фізичних чинників тепла Джоуля  $Q$  і радіальної компоненти  $F_r(r, t)$  пондеромоторної сили  $\vec{F}$  необхідно згідно співвідношень Максвелла у випадку плоскої осесиметричної задачі електродинаміки для суцільного циліндра знайти відмінну від нуля осьову компоненту  $H_z(r, t)$  вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ . Ця компонента є функцією радіальної змінної  $r$  та часу  $t$ .

Для знаходження функції  $H_z(r, t)$  зі співвідношень Максвелла отримуємо рівняння

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} - \sigma \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Тут  $\sigma$  – коефіцієнт електропровідності,  $\mu$  – магнітна проникність матеріалу циліндра.

Рівняння (2) розв'язуємо за крайової умови

$$H_z(R, t) = H_{z0}(t) \quad (3)$$

на поверхні  $r = R$  суцільного циліндра та умови осесиметричності функції  $H_z(r, t)$  на його осі  $r = 0$

$$\frac{\partial H_z(0, t)}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

В момент часу  $t = 0$  початкова умова має вигляд

$$H_z(r, 0) = 0. \quad (5)$$

За знайденим розв'язком початково-крайової задачі (2)-(5) записуємо вирази питомих густин об'ємно розподілених нестационарного тепла Джоуля

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)^2 \quad (6)$$

і пондеромоторної сили

$$F_r = \sigma \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \cdot H_z \quad (7)$$

у суцільному циліндрі.

## 2. Визначення тепла Джоуля і пондеромоторної сили у суцільному циліндрі за дії електромагнітного імпульсу

Розв'язок початково-крайової задачі (2)-(5) знаходимо з використанням апроксимації розподілу функції  $H_z$  по довжині радіуса циліндра кубічним поліномом за радіальною координатою

$$H_z(r, t) = \sum_{i=0}^3 a_i(t) r^i. \quad (8)$$

Коефіцієнти апроксимаційного полінома (8) визначаємо через граничне значення  $H_z^+(t) = H_{z0}(t)$  функції  $H_z(r, t)$  на поверхні  $r = R$  циліндра та інтегральні за радіальною координатою її характеристики  $H_{zs}(t)$

$$H_{zs}(t) = \frac{s+1}{R^{s+1}} \int_0^R H_z(r, t) r^s dr, \quad s = 1, 2. \quad (9)$$

Для знаходження інтегральних характеристик  $H_{zs}(t)$  вихідне рівняння (2) інтегруємо за радіальною координатою  $r$  відповідно до формули (9) і використовуємо при перетвореннях подання (8).

Тоді для інтегральних характеристик  $H_{zs}(t)$  функції  $H_z(r, t)$  отримуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dH_{z1}(t)}{dt} - \frac{40}{m_0} H_{z1}(t) + \frac{90}{m_0} H_{z2}(t) = \frac{10}{m_0} H_{z0}(t), \quad (10)$$

$$\frac{dH_{z2}(t)}{dt} - \frac{140}{3m_0} H_{z1}(t) + \frac{195}{2m_0} H_{z2}(t) = \frac{55}{6m_0} H_{z0}(t).$$

Тут  $m_0 = \sigma \mu R^2$ .

Застосовуючи перетворення Лапласа за часом до системи (10) отримуємо такі вирази інтегральних характеристик  $H_{zs}(t)$  осьової компоненти  $H_z(r, t)$

$$H_{z1}(t) = \sum_{\kappa=1}^2 \int_0^t H_{z0}(t-\tau) \frac{10}{m_0} \cdot \frac{p_{\kappa} + \frac{15}{m_0}}{2p_{\kappa} + \frac{115}{2m_0}} e^{p_{\kappa}\tau} d\tau, \quad (11)$$

$$H_{z2}(t) = \sum_{\kappa=1}^2 \int_0^t H_{z0}(t-\tau) \frac{55}{6} \frac{1}{m_0} \cdot \frac{p_{\kappa} + \frac{120}{11m_0}}{2p_{\kappa} + \frac{115}{2m_0}} e^{p_{\kappa}\tau} d\tau.$$

Тут  $p_{\kappa}$  – корені характеристичного рівняння системи (10). За відомими виразами  $H_{zs}(t)$  і  $H_{z0}(t)$  у результаті перетворень для осьової компоненти  $H_z(r, t)$  вектора  $\vec{H}$  отримуємо вираз

$$H_z(r_*, t) = H_{z1}(t) \left( 20 - 100(r_*)^2 + 80(r_*)^3 \right) + \quad (12)$$

$$+ H_{z2}(t) \left( -30 + 180(r_*)^2 - 150(r_*)^3 \right) + H_{z0}(t) \left( 1 - 10(r_*)^2 + 10(r_*)^3 \right).$$

Тут  $r_* = r/R$  – безрозмірна радіальна координата.

Для побудови розв'язку початково-крайової задачі (2)-(5) за дії ЕМІ вираз (1) підставляємо у формули (11) і з врахуванням співвідношень (12) отримуємо вираз функції  $H_z(r_*, t)$ :

$$\frac{H_z(r_*, t)}{H_0} = \kappa \sum_{i=1}^4 \sum_{m=1}^2 \left\langle A_{im} \cdot e^{-\beta_1 t} + A_{2im} \cdot e^{-\beta_2 t} + A_{3im} \cdot e^{p_m t} \right\rangle r_*^{i-1}. \quad (13)$$

Тут:

$$A_{im} = B_{im} A_{1m}; \quad A_{2im} = B_{im} A_{2m}; \quad A_{3im} = B_{im} A_{3m};$$

$$B_{1m} = 20\Phi_1^m - 30\Phi_2^m; \quad B_{2m} = 0;$$

$$B_{3m} = -100\Phi_1^m + 180\Phi_2^m; \quad B_{4m} = 80\Phi_1^m - 150\Phi_2^m;$$

$$A_{1m} = C_i - 1/(\beta_1 + p_m); \quad A_{2m} = C_i - 1/(\beta_2 + p_m);$$

$$A_{3m} = 1/(\beta_1 + p_m) + 1/(\beta_2 + p_m);$$

$$C_1 = 1; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = -10; \quad C_4 = 10;$$

$$\Phi_1^1 = \frac{10}{m_0} \cdot \frac{p_1 + 15/m_0}{2p_1 + 115/(2m_0)}; \quad \Phi_1^2 = \frac{10}{m_0} \cdot \frac{p_2 + 15/m_0}{2p_2 + 115/(2m_0)};$$

$$\Phi_2^1 = \frac{55}{6} \frac{1}{m_0} \cdot \frac{p_1 + 120/(11m_0)}{2p_1 + 115/(2m_0)}; \quad \Phi_2^2 = \frac{55}{6} \frac{1}{m_0} \cdot \frac{p_2 + 120/(11m_0)}{2p_2 + 115/(2m_0)};$$

$$p_m - \text{корені рівняння } p^2 + 115/(2m_0)p + 300/(m_0^2) = 0, \quad m_0 = \sigma_0 \mu R^2.$$

За відомою функцією  $H_z(r_*, t)$  з використанням формул (6) і (7) записуємо вирази питомих густин об'ємно розподілених у розглядуваному циліндрі нестаціонарних джерел тепла Джоуля  $Q(r_*, t)$  і пондеромоторної сили  $F_r(r_*, t)$ , зумовлених дією ЕМІ.

$$\frac{Q(r_*, t)}{H_0^2} = \frac{\kappa^2}{\sigma R^2} \sum_{i=2}^4 \sum_{j=2}^4 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (i-1)(j-1) \phi_{ijmn}(t) r_*^{i+j-4} \quad (14)$$

$$\frac{F_r(r_*, t)}{H_0^2} = \frac{\kappa^2}{\sigma R^2} \sum_{i=2}^4 \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (i-1)j \phi_{ijmn}(t) r_*^{i+j-3} \quad (15)$$

Тут функція  $\phi_{ijmn}(t)$  має вигляд:

$$\begin{aligned} \phi_{ijmn}(t) = & (D_{1ijmn} + D_{2ijmn})e^{-2\beta_1 t} + (D_{3ijmn} + D_{4ijmn})e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + (D_{5ijmn} + D_{6ijmn})e^{-2\beta_2 t} + \\ & + D_{7ijmn}e^{(p_m + p_n)t} + D_{8ijmn}e^{(p_m - \beta_1)t} + D_{9ijmn}e^{(p_m - \beta_2)t} + D_{10ijmn}e^{(p_n - \beta_1)t} + D_{11ijmn}e^{(p_n - \beta_2)t}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти  $D_{1ijmn} \div D_{11ijmn}$  у формулі (14) записуються виразами, які залежать від коренів  $p_m$  і  $p_n$  записаного вище характеристичного рівняння та параметрів  $\beta_1$  і  $\beta_2$ , що характеризують часові залежності фронтів наростання і спадання ЕМІ.

### 3. Комп'ютерний аналіз тепла Джоуля і пондеромоторної сили у мідному суцільному циліндрі за дії ЕМІ

Розрахунки проводилися для суцільного мідного циліндра радіуса  $R = 0,01 \text{ м}$ . Час тривалості дії ЕМІ вибрано рівним  $t_i = 10^{-3} \text{ с}$ . Результати числових досліджень подано на Рис. 1-5.

На Рис. 1 зображено зміну в часі тепла Джоуля  $Q/H_0^2$  у розглядуваному циліндрі за час тривалості ЕМІ  $t_i = 10^{-3} \text{ с}$ . Обчислення виконано на поверхні циліндра  $r = R$  та на його серединній поверхні  $r = R/2$ .

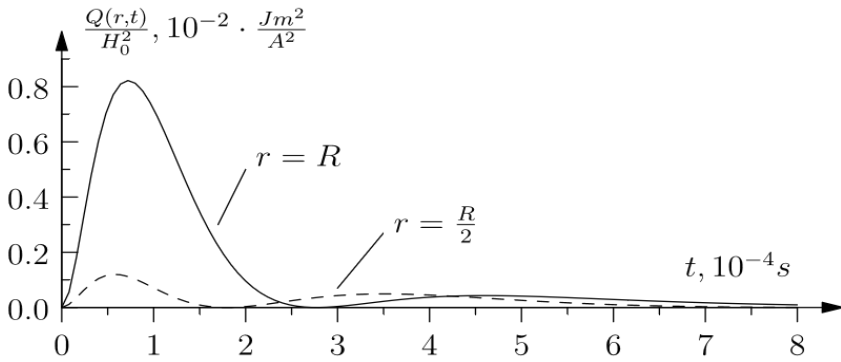


Рис. 1. Зміна в часі тепла Джоуля  $Q/H_0^2$  у мідному циліндрі за дії ЕМІ тривалістю  $t_i = 10^{-3} s$  (на поверхні – суцільна, посередині – штрихова лінії).

Суцільна лінія відповідає зміні в часі тепла Джоуля  $Q/H_0^2$  на поверхні  $r = R$ , а штрихова – на поверхні  $r = R/2$ . Отримано, що за час тривалості  $t_i = 10^{-3} s$  дії ЕМІ вихід тепла Джоуля  $Q/H_0^2$  на максимальні значення на обох циліндричних поверхнях  $r = R$  і  $r = R/2$  відбувається приблизно за час  $t \approx 0.1t_i$ .

Зміну тепла Джоуля  $Q/H_0^2$  по радіальній координаті у даному циліндрі в моменти часу  $t = 0.1t_i$ ,  $t = 0.05t_i$  і  $t = 0.25t_i$  дії ЕМІ зображено на Рис. 2. Суцільна лінія відповідає зміні тепла Джоуля  $Q/H_0^2$  по радіальній координаті  $r_* = r/R$  в момент часу  $t \approx 0.1t_i$ , штрихова лінія відповідає момент часу  $t \approx 0.05t_i$  і штрихпунктирна лінія відповідає момент часу  $t \approx 0.25t_i$ .

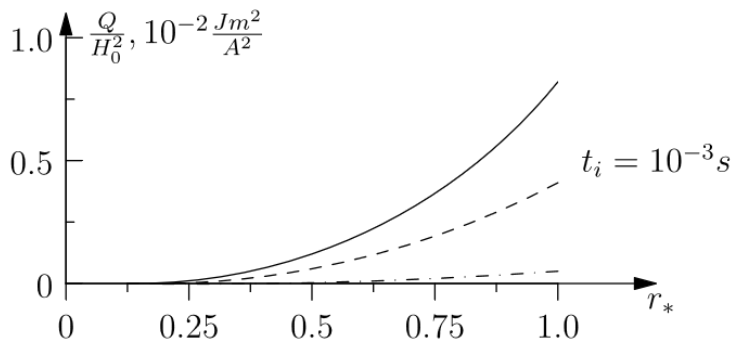


Рис. 2. Зміна тепла Джоуля  $Q/H_0^2$  у мідному циліндрі по радіальній координаті  $r_* = r/R$  за дії ЕМІ тривалістю  $t_i = 10^{-3} s$  в моменти часу  $t = 0.1t_i$ ,  $t = 0.05t_i$  і  $t \approx 0.25t_i$  (суцільна, штрихова та штрих-пунктирна лінії).

Встановлено, що в зазначені характерні моменти часу тепло Джоуля приймає максимальне значення на поверхні циліндра  $r_* = 1$  і стрімко спадає при наближенні до його осі  $r_* = 0$ .

На рис. 3 показано зміну в часі радіальної компоненти  $F_r(r, t)$  пондеромоторної сили на поверхнях  $r = R$  (суцільна лінія) і  $r = R/2$  (штрихова лінія).

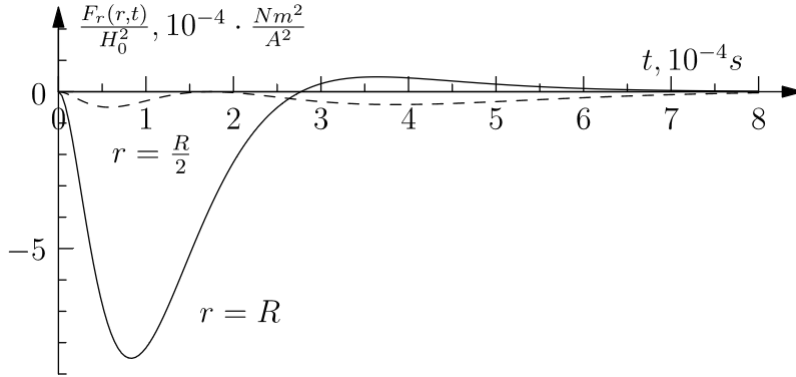


Рис. 3. Зміна в часі радіальної компоненти  $F_r/H_0^2$  пондеромоторної сили за дії ЕМІ тривалістю  $t_i = 10^{-3} \text{ s}$  при  $r = R$  (суцільна лінія) і  $r = R/2$  (штрихова лінія).

Отримано, що за час тривалості  $t_i = 10^{-3} \text{ s}$  дії ЕМІ вихід пондеромоторної сили  $F_r/H_0^2$  на максимальні значення на обох циліндричних поверхнях  $r = R$  і  $r = R/2$  відбувається приблизно за час  $t \approx 0.1 t_i$ . Пондеромоторна сила  $F_r/H_0^2$  в моменти часу  $0 < t < 0.27 t_i$  має на поверхні  $r = R$  стискальний характер, а в моменти часу  $0.27 t_i < t < t_i$  розтягальний характер. Відповідно на поверхні  $r = R/2$  в моменти часу  $0 < t < 0.15 t_i$  пондеромоторна сила  $F_r/H_0^2$  є стискальною, в моменти часу  $0.15 t_i < t < 0.2 t_i$  є розтягальною і в моменти часу  $0.2 t_i < t < t_i$  є стискальною, що замикає до нуля.

На рис. 4 зображено розподіл по радіальній координаті циліндра радіальної компоненти  $F_r/H_0^2$  пондеромоторної сили в моменти часу  $t = 0.1 t_i$ ,  $t = 0.05 t_i$  і  $t = 0.25 t_i$ .

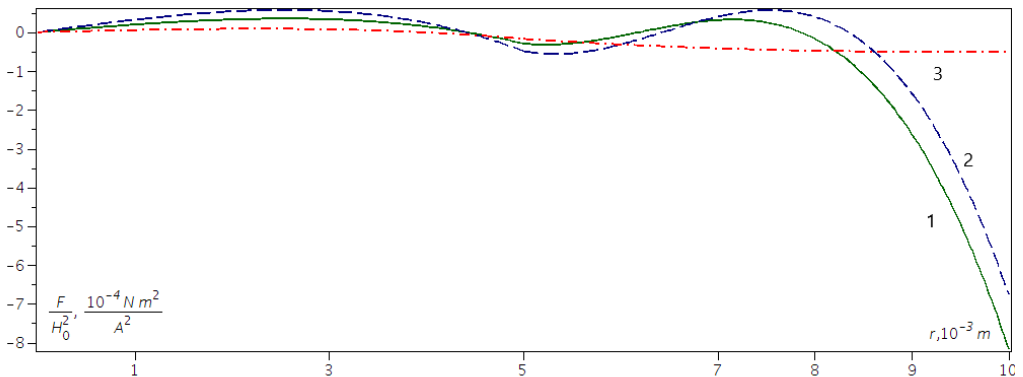


Рис. 4. Зміна радіальної компоненти  $F_r/H_0^2$  пондеромоторної сили за дії ЕМІ тривалістю  $t_i = 10^{-3} \text{ s}$  по радіальній координаті циліндра в моменти часу  $t = 0.1t_i$ ,  $t = 0.05t_i$  і  $t = 0.25t_i$  (суцільна, штрихова та штрих-пунктирна лінії).

Суцільна лінія відповідає розподілу пондеромоторної сили  $F_r/H_0^2$  по радіальній координаті циліндра в момент часу  $t = 0.1t_i$ , штрихова лінія – в момент часу  $t = 0.05t_i$ , а штрих-пунктирна — в момент часу  $t = 0.25t_i$ . Пондеромоторна сила при  $r_* < 0.45$  має розтягувальний характер, при  $0.45 < r_* < 0.7$  є стискальною, при  $0.7 < r_* < 0.85$  є розтягувальною і при  $r_* > 0.85$  – є стискальною. Відповідно максимальне стискальне значення пондеромоторної сили  $F_r/H_0^2$  є на порядок більше за максимальне розтягальне значення.

Зауважимо, що числовий аналіз тепла Джоуля і пондеромоторної сили, проілюстрований на Рис. 1 і Рис. 3, залежно від використовуваної величини напруженості магнітного поля  $H_0 = 10^3 \text{ A/m}$ ,  $10^4 \text{ A/m}$ ,  $10^6 \text{ A/m}$  дає змогу отримати відповідні максимальні значення даних фізичних величин, які подамо у вигляді таблиці.

| $H_0, \text{ A/m}$ | $Q, \text{ J}$   | $F_r, \text{ N}$  |
|--------------------|------------------|-------------------|
| $10^3$             | $8.2 \text{ kJ}$ | $0.85 \text{ kN}$ |
| $10^4$             | $820 \text{ kJ}$ | $85 \text{ kN}$   |
| $10^5$             | $82 \text{ MJ}$  | $8.5 \text{ MN}$  |
| $10^6$             | $8.2 \text{ GJ}$ | $850 \text{ MN}$  |

На основі наведеної таблиці можна оцінювати питому густину тепла Джоуля  $Q$  і пондеромоторної сили  $F_r$  залежно від величини  $H_0$  напруженості магнітного поля, створюваного пристроями, що використовуються для магніто-імпульсної обробки електропровідних елементів. Це дозволяє прогнозувати закономірності нагріву та деформування мідних стержнів при їх технологічній магніто-імпульсній обробці.

**Висновки.** Запропонована фізико-математична модель дає змогу дослідити закономірності процесів нагрівання і деформування електропровідних циліндрів, виготовлених з неферромагнітних матеріалів, при їх технологічній магніто-імпульсній обробці.

Розвинуто методику визначення осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля у електропровідному неферромагнітному циліндрі. Дана методика використовує апроксимацію розподілу такої компоненти за радіальною координатою кубічним поліномом. Коефіцієнти цього полінома записані у вигляді виразів, що відповідають інтегральним по радіальній координаті циліндра характеристикам осьової компоненти вектора напруженості магнітного поля і заданого значення цієї компоненти на поверхні циліндра. Застосована методика

дала змогу отримати вирази розглядуваної компоненти вектора напруженості магнітного поля, тепла Джоуля і пондеромоторної сили у зручній для чисельних експериментів формі, без використання функцій Бесселя та функціональних рядів стосовно цих функцій.

У результаті проведеного комп'ютерного аналізу:

1. Виявлено закономірності теплових і силових режимів у мідному суцільному циліндрі при його технологічній обробці електромагнітним імпульсом мілісекундної тривалості.

2. Встановлено залежності часів виходу тепла Джоуля та пондеромоторної сили на максимальні значення, за вказаної тривалості дії використаного ЕМІ.

3. Зі збільшенням величини напруженості магнітного поля створюваного ЕМІ, величина тепла Джоуля і пондеромоторної сили зростає за квадратичним законом.

4. Проаналізовано кількість тепла Джоуля і пондеромоторної сили, які виникають у мідному циліндрі залежно від величини напруженості магнітного поля.

Результати проведених досліджень є науковою основою для прогнозування теплових і силових режимів мідних циліндрів при їх технологічній обробці електромагнітним імпульсом.

#### **Література**

1. Asai S. Electromagnetic Processing of Materials. Springer, Netherlands (2012).
2. Rudnev, V.; Loveless, D.; Cook, R. Handbook of Induction Heating; CRC Press: London, UK; Taylor and Francis Group: Abingdon, UK, 2018.
3. Bobart, G.F. Induction heating. AccessScience. 2020.
4. Areitioaurtena, M., Segurajauregi, U., Akujärvi, V. et al. A semi-analytical coupled simulation approach for induction heating. Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci. 8, 14 (2021).
5. Gantsevich, S.; Gurevich, V. Joule heat release during current flow through a nanowire. Phys. Solid State 2016, 58, 1711–1715.
6. Musii, R.; Pukach, P.; Kohut, I.; Vovk, M.; Šlahor, L. Determination and Analysis of Joule's Heat and Temperature in an Electrically Conductive Plate Element Subject to Short-Term Induction Heating by a Non-Stationary Electromagnetic Field. Energies 2022, 15, 525
7. Musii R., Pukach P., Melnyk N., Vovk M., Šlahor L. Modeling of the temperature regimes in a layered bimetallic plate under short-term induction heating // Energies. – 2023. – Vol. 16, iss. 13.
8. Musii R., Melnyk N., Drohomiretska K., Melnyk M. Investigation of the heating regimes of a steel strip by a quasi-steady electromagnetic field // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory : proceedings of 2023 IEEE XXVIIIth International seminar/workshop DIPED-2023 (Tbilisi, September 11-13, 2023). – 2023. – С. 229–232

## Determination and analysis of Joule heat and ponderomotive force in a solid copper cylinder under the action of an electromagnetic impulse

Roman Musii, Andrii Kunynets, Bohdan Bandytskyi, Halyna Ivasyk

*The initial-boundary problem of electrodynamics for a solid electrically conductive cylinder subjected to an electromagnetic pulse has been formulated. The effect of such a pulse appears in two physical factors – Joule heat and ponderomotive force. For the purpose of determining their expressions, it is first necessary to determine the axial component of the magnetic field intensity vector from the solution of the formulated electrodynamics problem, and then to write down the expressions for the specific heat density of Joule and the ponderomotive force in the cylinder under consideration. The cubic approximation of the distribution of the axial component of the magnetic field intensity vector along the radial variable was used to find the solution to the electrodynamics problem. As a result, the initial boundary value problem for the determinant function is reduced to the Cauchy problem for the time variable for the integral characteristics of the determinant function for the radial variable. The solution of the Cauchy problem is obtained using the Laplace integral transform, and the expressions for the integral characteristics and the axial component of the magnetic field intensity vector are obtained. The expressions for the determinant function, specific heat density of Joule, and ponderomotor force in the cylinder under consideration under the action of an electromagnetic impulse are derived based on the general solutions of the initial boundary value problem obtained under non-stationary electromagnetic action. A numerical analysis was performed of the change over time and distribution along the radius of the cylinder of the axial component of the magnetic field intensity vector and physical factors – Joule heat and ponderomotor force – depending on the duration of the electromagnetic impulse.*

**Keywords:** solid copper cylinder, electromagnetic impulse, axial component of the magnetic field intensity vector, Joule heat, ponderomotive force.

Отримано 16. 12. 2025