

Аналіз теплових режимів алюмінієвої пластини за дії квазіусталеного електромагнітного поля

Роман Мусій¹, Андрій Кунинець², Любомир Гошко³, Роман Пелех⁴

¹д. ф.-м. н., професор, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: roman.s.musij@lpnu.ua

²к. ф.-м. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: andrii.v.kunynets@lpnu.ua

³к. ф.-м. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: liubomyr.v.hoshko@lpnu.ua

⁴аспірант, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: roman.y.pelekh@lpnu.ua

Сформульовано двовимірну початково-крайову задачу електродинаміки для алюмінієвої пластини, яка знаходиться за дії квазіусталеного електромагнітного поля. За визначальну функцію вибрано дотичну до основ пластини компоненту вектора напруженості магнітного поля. Дія квазіусталеного електромагнітного поля зумовлює виникнення в ній джерел тепла Джоуля. Ці джерела за відповідних параметрів електромагнітної дії створюють певні теплові режими даної пластини. Для знаходження розв'язку задачі електродинаміки використано скінчені інтегральні перетворення за товщиною та поперечною координатами прямокутника поперечного перерізу пластини та інтегральним перетворенням Лапласа за часом. Проведено числовий аналіз тепла Джоуля для двох характерних випадків приповерхневого та суцільного індукційного нагріву квазіусталеним електромагнітним полем. Проаналізовано зміну в часі тепла Джоуля на перехідному режимі та його розподіл по поперечному перерізу пластини в усталеному режимі дії електромагнітного поля.

Ключові слова: алюмінієва пластини, квазіусталене електромагнітне поле, тепло Джоуля, приповерхневий та суцільний нагрів, теплові режими.

Вступ. Магнітопроводи двигунів, генератори, котушки індуктивності, трансформатори під час їх роботи зазнають дії зовнішніх електромагнітних полів (ЕМП), зокрема квазіусталених ЕМП (КЕМП). Такі КЕМП описують моменти включення ЕМП, що мають характер синусоїдально змінних в часі. Конструктивними елементами вище зазначених пристроїв, які використовуються в електроенергетиці, автомобіле- та авіабудуванні є, зокрема, алюмінієві пластини. Для підвищення надійності та довготривалості експлуатації таких електротехнічних пристроїв, що містять алюмінієві пластини, які зазнають впливу КЕМП, необхідно розраховувати їх теплові та температурні режими з метою прогнозування їх роботоздатності. Тому предметом розгляду багатьох фундаментальних праць, зокрема монографій [1-4], є математичні моделі, чисельно-аналітичні та експериментальні підходи для опису та дослідження теплових і температурних режимів таких виробів.

У переважній більшості праць розглядаються одновимірні задачі індукційного нагріву електропровідних тіл канонічної форми усталеним ЕМП. Для них детально вивчено процеси нагріву під дією такого ЕМП. За останні роки розроблено низку одновимірних математичних моделей стосовно теплових процесів, зумовлених індукційним нагрівом усталеним ЕМП.

У роботі [5], зокрема представлено одновимірну математичну модель визначення тепла Джоуля у вигляді теплового навантаження на тонку металеву пластину, що піддається поперечному впливу однорідного змінного в часі ЕМП низької частоти. Задача розв'язується в аналітичній формі як внутрішня крайова задача Діріхле. Дослідження температурних полів у тонких електропровідних пластинах за високочастотного індукційного нагріву розглянуто в роботах [6, 7].

У сучасних технологіях електромагнітної термообробки електропровідних пластинчастих елементів використовують короткочасний індукційний нагрів з допомогою КЕМП та неусталених ЕМП [8]. Тому задача математичного моделювання теплових процесів у електропровідних пластинах і дослідження їх теплових режимів при індукційному нагріві КЕМП є актуальною інженерною задачею.

Проте, для більш повного і детального аналізу теплових процесів у електропровідних пластинах, зокрема алюмінієвих, що зазнають дії КЕМП, необхідно використовувати двовимірні математичні моделі[9].

Метою даної роботи є: побудова двовимірної математичної моделі для визначення тепла Джоуля у електропровідній пластині при індукційній термообробці з допомогою КЕМП; розробка методики побудови розв'язку відповідної початково-крайової задачі електродинаміки для визначення параметрів КЕМП і тепла Джоуля; дослідження теплових режимів алюмінієвої пластини для двох характерних типів приповерхневого та суцільного індукційного нагріву.

1. Двовимірна фізико-математична модель

У Декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$ розглядається електропровідна пластина товщиною $2h$ і шириною $2d_*$ (рис.1). Початок системи координат точка O співпадає з центром симетрії прямокутника її поперечного перерізу. Декартові координати X_1, X_3 віднесемо до пів товщини h пластини. Надалі будемо розглядати безрозмірні координати $x_1 = X_1/h$, $x_3 = X_3/h$ і ширину пластини $d = d_*/h$. Пластина безмежно довга по осі Ox_2 . Ширина пластини відкладається вздовж Ox_1 , а товщина – вздовж осі Ox_3 .

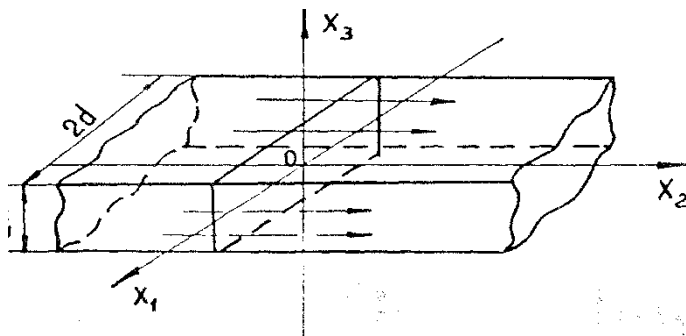


Рис. 1 Електропровідна пластина

Пластина виготовлена з однорідного, ізотропного і неферомагнітного матеріалу. Електрофізичні параметри матеріалу вважаються сталими і рівними їх середнім значенням на відповідних інтервалах нагріву.

Індукційний нагрів пластини здійснюється зовнішнім однорідним КЕМП. Внаслідок протікання індукційних струмів у пластині виникає тепло Джоуля Q . Для встановлення закономірностей теплових режимів у пластині за відповідних параметрів індукційного нагріву запропоновано двовимірну фізико-математичну модель. Дана модель складається з двох етапів.

На першому етапі зі співвідношень Максвелла визначаємо розподіл ЕМП у пластині. На другому етапі знаходимо вираз питомої густини тепла Джоуля.

2. Визначення електромагнітного поля.

Приймаємо, що вектор напруженості магнітного поля у пластині має вигляд $\vec{H}(x_1, x_3, t) = \{ 0; H_2(x_1, x_3, t); 0 \}$. Компонента $H_2(x_1, x_3, t)$ паралельна до основ пластини $x_3 = \pm 1$ та до її торцевих перетинів $x_1 = \pm d$. Тут t - час.

Для визначення компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ у розглядуваній пластині отримуємо рівняння:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) H_2 - \frac{\partial H_2}{\partial \tau} = 0. \quad (1)$$

Тут $\tau = t / (\sigma \mu h^2)$ - безрозмірний час, характерний для дифузії магнітного поля через півтовщину h пластини; σ - коефіцієнт електропровідності, μ - магнітна проникливість матеріалу пластини.

Дії зовнішнього КЕМП задається значеннями компоненти $H_2(x_1, x_3, t)$ на всіх зовнішніх поверхнях пластини. Відповідно цьому граничні умови для розв'язування рівняння (1) записуються у вигляді:

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_2^{(0)}(x_1, \tau) \quad (2)$$

$$H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau).$$

Тут $H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau)$ і $H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau)$ задані вирази функції $H_2(x_1, x_3, \tau)$ на поверхнях пластини $x_3 = \pm 1$, $x_1 = \pm d$.

Якщо у початковий момент часу $\tau = 0$ ЕМП у пластині відсутнє, то початкова умова на функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ має вигляд:

$$H_2(x_1, x_3, 0) = 0 \quad (3)$$

У кутових точках поперечного перерізу пластини повинні також виконуватись умови узгодження функцій $H_2^{\pm(0)}$ і $H_2^{\pm(0)*}$, а саме:

$$H_2^{+(0)}(d, \tau) = H_2^{+(0)*}(1, \tau), \quad H_2^{-(0)}(d, \tau) = H_2^{-(0)*}(-1, \tau), \quad (4)$$

$$H_2^{+(0)}(-d, \tau) = H_2^{-(0)*}(1, \tau), \quad H_2^{-(0)}(-d, \tau) = H_2^{-(0)*}(-1, \tau).$$

Вектор напруженості електричного поля у пластині визначаємо з співвідношення

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}(\text{rot} \vec{H}). \quad (5)$$

Дві відмінні від нуля компоненти вектора напруженості електричного поля $\vec{E}(x_1, x_3, \tau) = \{E_1(x_1, x_3, \tau); 0; E_3(x_1, x_3, \tau)\}$ описуються виразами:

$$E_1 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_3}, \quad E_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_1}. \quad (6)$$

Питому густину тепла Джоуля знаходимо за формулою

$$Q = \sigma \vec{E} \vec{E} \quad (7)$$

тобто з врахуванням скалярного добутку маємо вираз

$$Q = \frac{1}{\sigma} [E_1^2 + E_3^2]. \quad (8)$$

Через функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ тепло Джоуля записується формулою

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left[\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

3. Побудова розв'язку задачі електродинаміки

Для знаходження розв'язку рівняння (1) використовуємо апроксимацію компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектора $\vec{H}$ по товщинній змінній x_3 кубічним поліномом

$$H_2(x_1, x_3, \tau) = \sum_{j=1}^4 a_{2(j-1)}(x_1, \tau) x_3^{j-1}. \quad (14)$$

Коефіцієнти $a_{2(j-1)}(x_1, \tau)$ полінома (14) подаємо через інтегральні характеристики компоненти H_2 вектора напруженості магнітного поля

$$H_{2s}(x_1, \tau) = \frac{2s-1}{2} \int_{-1}^1 H_2(x_1, x_3, \tau) x_3^{s-1} dx_3 \quad (s=1, 2) \quad (15)$$

і задані граничні значення $H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau)$ компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ на поверхнях $x_3 = \pm h$. Рівняння для визначення інтегральних характеристик H_{2s} отримуємо множенням рівняння (1) на x_3^{s-1} та їх інтегруванням по змінній x_3 з врахуванням формул (14), (15).

Система вихідних рівнянь для інтегральних характеристик H_{2s} ($s=1, 2$), компоненти H_2 запишеться

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau} \right) H_{21}(x_1, \tau) - 3H_{21}(x_1, \tau) &= -\frac{3}{2} \left[H_2^{+(0)}(x_1, \tau) + H_2^{-(0)}(x_1, \tau) \right], \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau} \right) H_{22}(x_1, \tau) - 15H_{22}(x_1, \tau) &= \frac{15}{2} \left[H_2^{+(0)}(x_1, \tau) - H_2^{-(0)}(x_1, \tau) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Відповідно початкові умови на функції H_{2s} ($s=1, 2$) будуть:

$$H_{21}(x_1, 0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 H_2(x_1, x_3, 0) dx_3, \quad H_{22}(x_1, 0) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 H_2(x_1, x_3, 0) x_3 dx_3, \quad (17)$$

Коефіцієнти апроксимаційного кубічного полінома (14) виражаються через інтегральні характеристики H_{2s} і задані граничні значення функції H_2 на поверхнях $x_3 = \pm 1$ формулами

$$\begin{aligned} \alpha_{20} &= \frac{3}{2} H_{21} - \frac{1}{4} q_1, & \alpha_{21} &= \frac{5}{2} H_{22} - \frac{3}{4} q_2, \\ \alpha_{22} &= \frac{3}{4} q_1 - \frac{3}{2} H_{21}, & \alpha_{23} &= \frac{5}{4} q_2 - \frac{5}{2} H_{22}, \end{aligned} \quad (18)$$

де $q_1 = H_2^{+(0)} + H_2^{-(0)}$, $q_2 = H_2^{+(0)} - H_2^{-(0)}$.

Систему рівнянь (16) на інтегральні характеристики H_{2s} ($s=1, 2$) розв'язуємо за граничних умов

$$H_{21}(\pm d, \tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau) dx_3, \quad H_{22}(\pm d, \tau) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau) x_3 dx_3. \quad (19)$$

Тут $H_2^{\pm(0)*}$ - відомі функції (задані на поверхнях $x_1 = \pm d$ значення функції H_2). Враховуючи неоднорідні граничні умови (19) на функції H_{2s} ($s=1, 2$) подаємо розв'язок системи рівнянь (16) у вигляді

$$H_{2s} = H_{2s}^* + H_{2s}^{**}. \quad (20)$$

Доданки H_{2s}^* в силу граничних умов (19) будуть

$$H_{2s}^* = \frac{1}{2} \left[(H_{2s}(d, \tau) + H_{2s}(-d, \tau) + \frac{x_1}{d} (H_{2s}(d, \tau) - H_{2s}(-d, \tau))) \right]. \quad (21)$$

При цьому, на основі системи рівнянь (16) для функції H_{2s} ($s=1,2$), доданки H_{2s}^{**} задовольняють рівнянням

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \frac{d}{d\tau} - 3 \right) H_{21}^* = -\frac{3}{2} (H_2^{+(0)} + H_2^{-(0)}) + \left(\frac{d}{d\tau} + 3 \right) H_{21}^*, \quad (22)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \frac{d}{d\tau} - 15 \right) H_{22}^{**} = -\frac{15}{2} (H_2^{+(0)} - H_2^{-(0)}) + \left(\frac{d}{d\tau} + 3 \right) H_{21}^*$$

при однорідних граничних і початкових умовах:

$$H_{2s}^{**}(x_1, 0) = H_{2s}(x_1, 0) - H_{2s}^*(x_1, 0) \quad (23)$$

Для розв'язування задачі (22), (23) використовуємо скінченне інтегральне перетворення по координаті x_1 з ядром

$$K(\alpha_k, x_1) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sin \alpha_k (x_1 + d), \quad (24)$$

де $\alpha_k = \frac{\pi k}{2d}$, $k \in N$. Відповідно маємо пряме і обернене скінченні інтегральні перетворення:

$$\tilde{H}_{2sk}^{**}(\alpha_k, \tau) = \int_{-d}^d H_{2s}^{**}(x_1, \tau) K(\alpha_k, x_1) dx_1, \quad (25)$$

$$H_{2s}^{**}(x_1, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{H}_{2sk}^{**}(\alpha_k, \tau) K(\alpha_k, x_1). \quad (26)$$

Застосуємо до системи (22) скінченне інтегральне перетворення (25). Виконуючи безпосереднє інтегрування перетворених рівнянь (22) за часом, з урахуванням початкових умов (23) для функцій H_{2s}^{**} і застосовуючи до системи (22) обернене скінченне інтегральне перетворення (26), отримуємо вирази

$$H_{21}^{**}(x_1, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\alpha_k^2 + 3)\tau} \left[\tilde{\Phi}_{21k}(\alpha_k, \tau) - \tilde{\Phi}_{21k}(\alpha_k, 0) + \tilde{H}_{21k}^{**}(\alpha_k, 0) \right] K(\alpha_k, x_1), \quad (27)$$

$$H_{22}^{**}(x_1, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\alpha_k^2 + 15)\tau} \left[\tilde{\Phi}_{22k}(\alpha_k, \tau) - \tilde{\Phi}_{22k}(\alpha_k, 0) + H_{22k}^{**}(\alpha_k, 0) \right] K(\alpha_k, x_1).$$

Тут

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{21k}(\alpha_k, \tau) &= \int e^{-(\alpha_k^2+3)\tau} \left\{ \frac{3}{2} [\tilde{H}_2^{+(0)}(\alpha_k, \tau) + \tilde{H}_2^{-(0)}(\alpha_k, \tau)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha_k \sqrt{d}} \left(\frac{d}{d\tau} + 3 \right) [(-1)^k H_{21*}^+(\tau) - H_{21**}^-(\tau)] \right\} d\tau, \\ \tilde{\Phi}_{22k}(\alpha_k, \tau) &= \int e^{-(\alpha_k^2+15)\tau} \left\{ \frac{15}{2} [\tilde{H}_2^{+(0)}(\alpha_k, \tau) - \tilde{H}_2^{-(0)}(\alpha_k, \tau)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha_k \sqrt{d}} \left(\frac{d}{d\tau} + 15 \right) [(-1)^k H_{22*}^+(\tau) + H_{22**}^-(\tau)] \right\} d\tau.\end{aligned}$$

Після знаходження інтегральних характеристик H_{2s} функція $H_2(x_1, x_3, \tau)$ має вигляд

$$H_2(x_1, x_3, \tau) = H_{21} \frac{3}{2} (1 - x_3^2) + H_{22} \frac{5}{2} (x_3 - x_3^3) - \frac{1}{4} q_1 (1 - 3x_3^2) - \frac{1}{4} q_2 (3x_3 - 5x_3^3). \quad (28)$$

За знайденою функцією $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектор напруженості електричного поля визначається таким чином

$$\vec{E}(x_1, x_3, \tau) = \{ E_1; 0; E_3 \} = \left\{ -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_3}; 0; \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_1} \right\} \quad (29)$$

Запишемо вирази складових E_1 і E_3 вектора напруженості електричного поля через інтегральні характеристики H_{2s} функції $H_2(x_1, x_3, \tau)$:

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{1}{\sigma} \left[-3H_{21}x_3 + \frac{5}{2}(1 - 3x_3^2)H_{22} + \frac{3}{2}x_3q_1 - \frac{3}{4}q_2(1 - 5x_3^2) \right], \\ E_3 &= \frac{1}{\sigma} \left[\frac{3}{2}(1 - x_3^2) \frac{dH_{21}}{dx_1} + \frac{5}{2}(x_3 - x_3^3) \frac{dH_{22}}{dx_1} - \frac{1}{4}(1 - 3x_3^2) \frac{dq_1}{dx_1} - \frac{1}{4}(3x_3 - 5x_3^3) \frac{dq_2}{dx_1} \right].\end{aligned} \quad (30)$$

Далі за формулою (8) обчислюємо питому густину тепла Джоуля Q .

4. Комп'ютерний аналіз теплових режимів алюмінієвої пластини за дікквізустановленого електромагнітного поля

Розглядаємо індукційний нагрів електропровідної пластини однорідним КЕМП. Значення компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ на основах $x_3 = \pm 1$ і торцевих площинах $x_1 = \pm d$ пластини задаються виразами:

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_0 \phi(\tau) e^{ib\tau}, \quad H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_0 \phi(\tau) e^{ib\tau}. \quad (31)$$

При цьому умови (4) узгодження значень функцій $H_2^{\pm(0)}$ і $H_2^{\pm(0)*}$ у кутових точках поперечного перерізу пластини виконуються тотожно.

У виразах (31) функція $\phi(\tau)$ має вигляд:

$$\phi(\tau) = 1 - e^{\beta\tau}. \quad (32)$$

Тут $i = \sqrt{-1}$; $b = 1/(2\delta_0^2)$; $\delta_0 = (2\omega\sigma\mu h^2)^{-1/2}$ - параметр, що визначає відносну до півтовщини пластини h глибину проникання індукційних струмів частоти ω ; $\beta = \ln \varepsilon / \tau_*$; τ_* - безрозмірний час, що відповідає виходу електромагнітних коливань частоти ω на усталений режим з амплітудою H_0 ; $\varepsilon = 0.001$.

Підставляючи вирази (31) у формули (27), (28) з урахуванням (20), (21), отримуємо вираз компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$. Використовуючи формули (29), (30), записуємо вирази компонент вектора $\vec{E}$ напруженості електричного поля. Далі за формулою (8) знаходимо питому густину тепла Джоуля Q .

Числовий експеримент виконано для електропровідної пластини, виготовленої з алюмінію [10]. Товщина пластини $2h = 2 \text{ mm}$, ширина $2d_* = 80 \text{ mm}$ (відносна півширина пластини $d = 40$). Розрахунки проведено для двох значень параметра відносно до півтовщини пластини h глибини проникання індукційних струмів:

- 1) $\delta_0 = 0.1$ - приповерхневий нагрів;
- 2) $\delta_0 = 1$ - суцільний нагрів пластини.

Приповерхневому нагріву розглядуваної пластини відповідає кругова частота електромагнітних коливань $\omega_1 = 10.96 \cdot 10^5 \text{ 1/s}$, а суцільному нагріву - кругова частота електромагнітних коливань $\omega_2 = 1.1 \cdot 10^4 \text{ 1/s}$. Частота ω_1 належить до радіочастотного діапазону ЕМП, а частота ω_2 є поза околom цього діапазону.

На рис. 2, 3 показано зміну в часі τ тепла Джоуля Q/H_0^2 за приповерхневого та суцільного індукційного нагріву КЕМП. Обчислення проведено у характерних точках $M_1(0.25d, 0.25)$, $M_2(0.5d, 0.5)$, $M_3(0.9d, 0.9)$ поперечного перерізу алюмінієвої пластини. На рисунках синя лінія відповідає точці M_1 , оранжева - точці M_2 , зелена - точці M_3 .

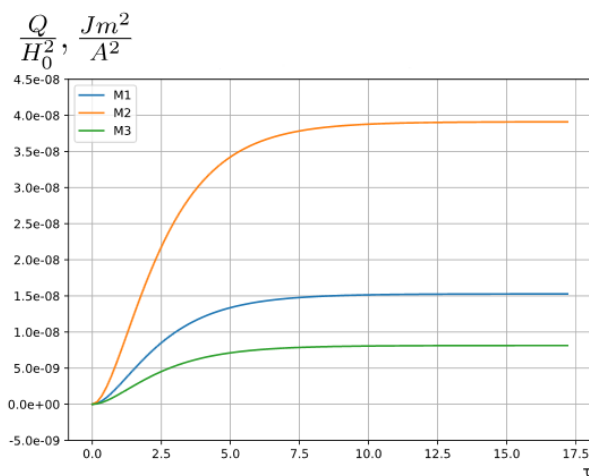


Рис. 2. Зміна в часі τ тепла Джоуля Q/H_0^2 за приповерхневого ($\delta_0 = 0.1$) індукційного нагріву КЕМП у характерних точках M_1 (0.25 d, 0.25), M_2 (0.5 d, 0.5), M_3 (0.9 d, 0.9) поперечного перерізу алюмінієвої пластини

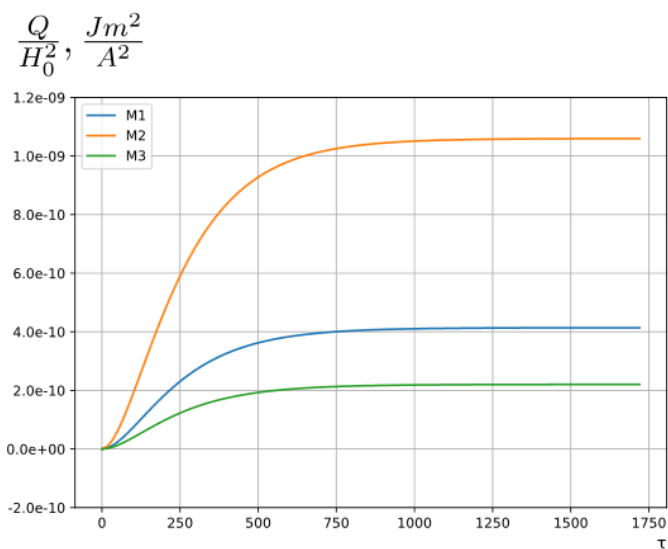


Рис. 3. Зміна в часі τ тепла Джоуля Q/H_0^2 за суцільного ($\delta_0 = 1$) індукційного нагріву КЕМП у характерних точках M_1 (0.25 d, 0.25), M_2 (0.5 d, 0.5), M_3 (0.9 d, 0.9) поперечного перерізу алюмінієвої пластини

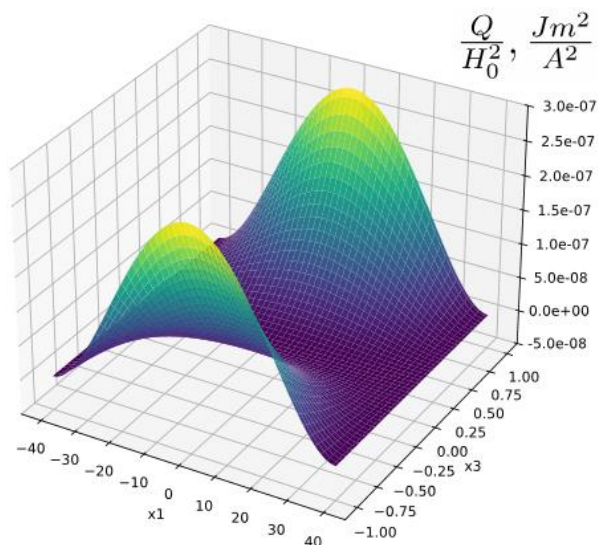


Рис. 4. Розподіл по поперечному перерізу алюмінієвої пластини тепла Джоуля Q/H_0^2 за приповерхневого ($\delta_0 = 0.1$) індукційного нагріву КЕМП в момент часу $\tau = 10$

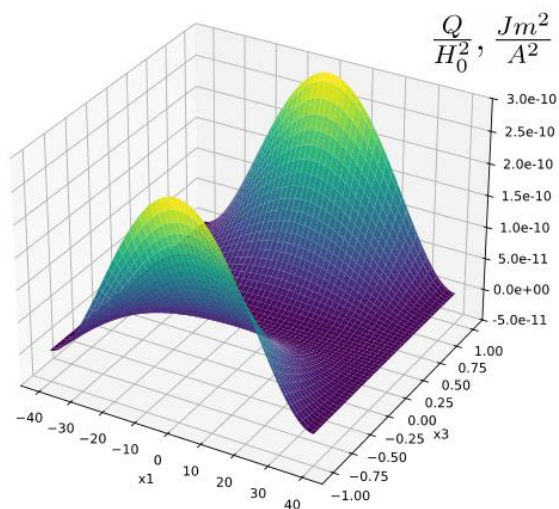


Рис. 5. Розподіл по поперечному перерізу алюмінієвої пластини тепла Джоуля Q/H_0^2 за суцільного ($\delta_0 = 1$) індукційного нагріву КЕМП в момент часу $\tau = 1000$

На основі аналізу залежностей, приведених на рис. 2 і рис. 3, встановлено,

що вихід на усталений режим індукційного нагріву розглядуваної алюмінієвої пластини (досягнення максимальних значень тепла Джоуля) відбувається у випадку приповерхневого нагріву в моменти безрозмірного часу $\tau \geq 10$, а у випадку суцільного нагріву в моменти безрозмірного часу $\tau \geq 1000$.

На рис. 4 зображено 3d-графік розподілу тепла Джоуля Q/H_0^2 по площі поперечного перерізу алюмінієвої пластини в момент часу $\tau = 10$ у випадку приповерхневого індукційного нагріву ($\delta_0 = 0.1$), а на рис. 5 – в момент часу $\tau = 1000$ у випадку суцільного індукційного нагріву ($\delta_0 = 1$).

З аналізу рис. 4, 5 випливає, що розподіл тепла Джоуля Q/H_0^2 по площі поперечного перерізу алюмінієвої пластини в обох випадках приповерхневого і суцільного індукційного нагріву в усталеному режимі має однаковий якісний характер. Числові значення тепла Джоуля Q/H_0^2 за приповерхневого нагріву приблизно у 40 разів більші за такі ж значення за суцільного нагріву.

Висновки

У результаті проведеного комп'ютерного аналізу тепла Джоуля отримано такі закономірності:

1) значення тепла Джоуля Q/H_0^2 для обох розглянутих випадків приповерхневого і суцільного нагріву зростають по мірі наближення до ребер пластини (до кутової мочки прямокутника поперечного перерізу);

2) зі збільшенням параметра δ_0 у 10 разів безрозмірний час виходу значень тепла Джоуля на максимальні значення, що відповідають усталеному режиму індукційного нагріву, зростає у 100 разів;

3) у випадку суцільного нагріву ($\delta_0 = 1$) максимальні значення тепла Джоуля Q/H_0^2 менші приблизно у 40 разів порівняно з такими самими значеннями для приповерхневого нагріву ($\delta_0 = 0.1$);

4) зі збільшенням H_0 , що відповідає амплітуді усталених електромагнітних коливань в обох розглянутих випадках приповерхневого і суцільного нагріву максимальні значення тепла Джоуля Q зростають за квадратичним законом.

Проведений у даній роботі аналіз тепла Джоуля у алюмінієвій пластині має важливе теоретичне і прикладне значення в практиці інженерних розрахунків та прогнозуванні роботоздатності алюмінієвих пластинчастих елементів, які зазнають дії зовнішнього квазіусталеного електромагнітного поля.

Література

1. Lupi, S. Fundamentals of Electroheat, Electrical Technologies for Process Heating; Springer: Cham, Switzerland, 2017. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-46015-4>
2. Bobart, G.F. Induction heating. AccessScience. 2020.
Available online: <https://www.accessscience.com/content/article/a341500>
3. Rudnev, V.; Loveless, D.; Cook, R. Handbook of Induction Heating; CRC Press: London, UK; Taylor and Francis Group: Abingdon, UK, 2018.

4. Asai S. Electromagnetic Processing of Materials. Springer, Netherlands (2012).
5. Gantsevich, S.; Gurevich, V. Joule heat release during current flow through a nanowire. Phys. Solid State 2016, 58, 1711–1715. <https://doi.org/10.1134/S1063783416080126>
6. Milošević-Mitić, V., Maneski T., Temperature loading of a thin metallic plate subjected transversal to low-frequency electromagnetic field, *FME TRANSACTIONS*, 2010, Vol. 38, no. 2, 95 – 102
7. Shen, H., Yao, Z.Q., Shi, Y.J. and Hu, J. Study on temperature field in high frequency induction heating, *Acta Metallurgica Sinica (English Letters)*, Vol. 19, No. 3, pp. 190-196, 2006. [https://doi.org/10.1016/S1006-7191\(06\)60043-4](https://doi.org/10.1016/S1006-7191(06)60043-4)
8. Musii, R.; Pukach, P.; Kohut, I.; Vovk, M.; Šlahor, L. Determination and Analysis of Joule's Heat and Temperature in an Electrically Conductive Plate Element Subject to Short-Term Induction Heating by a Non-Stationary Electromagnetic Field. *Energies* 2022, 15, 5250. <https://doi.org/10.3390/en15145250>
9. Musii R., Melnyk N., Drohomiretska K., Melnyk M. Investigation of the heating regimes of a steel strip by a quasi-steady electromagnetic field // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory : proceedings of 2023 IEEE XXVIIIth International seminar/workshop DIPED-2023 (Tbilisi, September 11-13, 2023). – 2023. – С. 229–232.
10. Thompson, M. Base Metals Handbook; Woodhead Publishing, Cambridge, UK, 2006. <https://doi.org/10.1016/B978-1-84569-154-7.50009-8>

Analysis of thermal regimes of an aluminium plate under the action of a quasi-steady electromagnetic field

Roman Musii, Andrii Kunynets, Liubomyr Hoshko, Roman Pelekh

A two-dimensional initial-boundary problem of electrodynamics for an aluminium plate under the action of a quasi-steady electromagnetic field has been formulated. The defining function is chosen as the component of the magnetic field intensity vector tangent to the plate base. The action of a quasi-steady electromagnetic field causes the emergence of Joule heat sources in it. These sources create certain thermal regimes of the plate under appropriate parameters of electromagnetic action. The solution of the electrodynamics problem was found using finite integral transformations in terms of the thickness and transverse coordinates of the rectangle of the plate cross-section and Laplace integral transformations in terms of time. A numerical analysis of Joule heat was performed for two characteristic cases of surface and continuous induction heating by a quasi-steady electromagnetic field. The time variation of Joule heat in the transient mode and its distribution across the cross section of the plate in the steady state of the electromagnetic field are analysed.

Keywords: aluminium plate, quasi-steady electromagnetic field, Joule heat, surface and solid heating, thermal regimes.

Отримано 15. 12. 2025