

## Особливості прояву нелінійностей для кутових коливань резервуара з рідиною. Гармонічне збудження

Олег Лимарченко,

Проф., д.т.н., Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Україна, Київ, проспект академіка Глушкова, 4-е, e-mail: olelim@knu.ua

Катерина Семенович

К.ф.-м.н., Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Україна, Київ, проспект академіка Глушкова, 4-е, e-mail: katernya.semenovych@knu.ua

*Вивчається задача про вимушені нелінійні сумісні коливання циліндричного резервуара з рідиною з вільною поверхнею на маятниковому підвісі під дією гармонічного моменту, прикладеного до резервуару. Розглянуті результати лінійного і нелінійного моделювання поведінки такої системи при гармонічному збудженні резервуара на маятниковому підвісі в околі першої резонансної частоти для двох довжин маятникового підвісу. Показано, що результати лінійного і нелінійного моделювання мають суттєві кількісні і якісні відмінності. Проаналізовані такі відмінності і причини їх виникнення. Показано специфічний характер взаємодії двох форм, які додатково до першої антисиметричної форми збуджуються через радіаційний ефект в системі, які в підсумку частково гасять одна одну на стінках резервуара і обумовлюють несиметричність профілів хвиль на вільній поверхні рідини.*

**Key words:** ideal liquid, free surface, reservoir on pendulum suspension, combined motion, analysis of nonlinear effects of wave generation

**Вступ.** У динаміці конструкцій з рідиною з вільною поверхнею найбільш складні режими поведінки систем мають місце при значних проявах ефектів сумісності руху конструкції і рідини. Додатковим ускладненням є рух системи в нелінійному діапазоні збурень. Такого роду задачі для випадків заданого поступального руху системи досліджені доволі докладно. Прояв сумісності руху складових компонент системи, як правило, приводить до виникнення частот, які пов'язані між собою трансцендентно [3, 6], що відразу вносить виникнення суттєвих нових властивостей в системі і виключає існування усталених періодичних режимів руху. Переважна більшість практичних задач динаміки резервуарів з рідиною пов'язана не з поступальним, а з кутовим рухом конструкції-носія, які досліджені значно менше і переважно на основі лінійних моделей. Саме кутові рухи конструкції є визначальними в задачах аерокосмічних систем, морського транспорту, землетрусів, тощо. Вивчення руху таких систем вказує до того ж, що прояв нелінійних механізмів для задач динаміки сумісного руху конструкції-носія і рідини у випадку кутових рухів резервуарів має значні відмінності від поступального руху конструкції. таких систем.

Існуючі методи, які ґрунтуються на поточковій дискретизації дотепер не були успішно застосовані до розв'язання нелінійних задач сумісного руху конструкцій з

рідиною. В той же час методи, які використовують варіаційні підходи, методи модальної декомпозиції і методи нелінійної механіки показали свою працездатність і для цього нового і складного класу задач. Всі головні результати дослідження резонансних і перехідних процесів у динаміці конструкцій з рідиною одержано саме на основі таких методів [4],

Виходячи з цього ставиться задача на основі розвинених математичних моделей, орієнтованих на дослідження нелінійних задач динаміки сумісного руху рідини в резервуарах циліндричної форми при кутових рухах конструкції-носія дослідити характер прояву нелінійних механізмів у формуванні динамічних процесів хвилеутворення на вільній поверхні рідини. Ці результати проілюстровані для випадку циліндричного резервуара на маятникових підвісах різних довжин при гармонічному моментному збудженні в околі резонансу.

### 1. Формулювання задачі.

Для моделювання руху рідини в циліндричному резервуарі для випадку, коли резервуар виконує поступальні і малі кутові рухи, скористаємося методом, розробленим в роботах [2–5]. За основу взято формулювання задачі у вигляді варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського

$$\delta I = 0, \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad L = T - \Pi, \quad (1)$$

для якого всім кінематичним граничним умовам слід задовільнити заздалегідь, а динамічні граничні умови та рівняння руху резервуара отримуються з варіаційного принципу (1). Тут  $L$  – функція Лагранжа, а  $T$  і  $\Pi$  – відповідно кінетична і потенціальна енергії. Функція Лагранжа має вигляд

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left[ \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} (\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) \right]^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\xi})^2 + \frac{1}{2} I_T^{ij} \omega_i \omega_j - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - \\ & - \rho g (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \cos \theta (\xi + H) dS - \\ & - \rho g (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \sin \theta (\xi + H) dS - \\ & - \frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int_S (\xi^2 - H^2) dS - (M_T h_T + M_F h_F) g (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) - \\ & - \sigma \int_S \sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2} dS - \sigma \cos \theta_1 \int_{L_0} \xi dl + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi} \end{aligned} \quad (2)$$

Зауважимо, що ізопериметрична вимога збереження об'єму рідини в функцію Лагранжа  $L$  не входить, так як представлення збурення вільної поверхні рідини  $\xi$  обирається так, щоб вимога збереження об'єму рідини виконувалась тотожно.

У виразі функції Лагранжа  $L$  (2) застосовані наступні позначення:  $\phi$  і  $\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}$  є відповідно скалярним і векторним потенціалами швидкостей рідини,  $\rho$  – густина рідини,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $H$  – рівень рідини в резервуарі,  $M_T$  та  $M_F$  – маса резервуару та рідини,  $h_T$  та  $h_F$  – зміщення центрів мас резервуару та рідини

відносно площини незбуреної вільної поверхні рідини  $S_0$ ,  $\sigma$  – коефіцієнт сил поверхневого натягу на вільній поверхні рідини,  $\theta_1$  – контактний кут,  $I_T^{ij}$  – тензор інерції резервуару, визначений відносно точки  $O$ ,  $\vec{F}$  та  $\vec{M}$  – головний вектор та головний момент зовнішніх сил відносно точки  $O$ , які діють на резервуар,  $\vec{\chi} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  – умовне представлення кутів повороту резервуару відносно умовно нерухомої системи координат (в рівняннях руху для опису кутового руху конструкції прийнято так звані літакові кути).

Згідно з вимогою наперед задовольнити кінематичним граничним умовам задачі представлення невідомих змінних задачі про рух резервуару та рідини з вільною поверхнею обираються у вигляді [4, 5]

$$\xi = \sum_i a_i(t) \psi_i(r, \theta), \quad \phi = \sum_i b_i(t) \psi_i(r, \theta) \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh \kappa_i H}, \quad \vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \sum_i \vec{q}_i(t) \psi_i(r, \theta) \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh \kappa_i H}. \quad (3)$$

Тут  $\psi_i(r, \theta)$  – повна ортогональна система функцій в області  $S_0$ , яка може бути знайдена з розв’язку крайової задачі Неймана з параметром  $\kappa_i$

$$\Delta \psi_k + \kappa_k^2 \psi_k = 0 \quad \text{в області } S_0, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial n} = 0 \quad \text{на } L_0. \quad (4)$$

Вектор-функція  $\vec{\Omega}_0$  є потенціалом Стокса-Жуковського, який можна отримати як розв’язок крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа

$$\Delta \vec{\Omega}_0 = 0 \quad \text{в області } S_0, \quad \frac{\partial \vec{\Omega}_0}{\partial n} = \vec{r} \times \vec{n} \quad \text{на } L_0. \quad (5)$$

Наведені в (3) представлення шуканих змінних  $\xi$ ,  $\phi$  та  $\vec{\Omega}_0$  в силу вибору функцій  $\psi_k$  тотожно задовольняють рівнянням неперервності та умовам неперетікання. Розклади (3) змінних  $\xi$ ,  $\phi$  та  $\vec{\Omega}_0$  фактично є розкладами за власними функціям лінійної задачі (4), (5), які є повними і ортогональними.

Найбільш складним в побудові незалежних (з точки зору аналітичної механіки) розкладів змінних  $\xi$ ,  $\phi$  та  $\vec{\Omega}_0$  є забезпечення виконання кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини. Ця проблема може бути розв’язана на основі методу Фур’є, методу Гальоркіна та варіаційного методу з використанням основ нелінійної механіки. Найбільш ефективно ця задача розв’язується у випадку, коли координатні функції є ортогональними та задовольняють кінематичним граничним умовам на змочуваній границі. В цьому випадку координатні функції обиралися наступним чином

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}(r, \theta) &= J_1\left(\frac{\kappa_1^{(1)}}{R} r\right) \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}; & \psi_3(r, \theta) &= J_0\left(\frac{\kappa_0^{(1)}}{R} r\right); & \psi_{4,5}(r, \theta) &= J_2\left(\frac{\kappa_2^{(1)}}{R} r\right) \cdot \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} \\ \psi_6(r, \theta) &= J_0\left(\frac{\kappa_0^{(2)}}{R} r\right); & \psi_{7,8}(r, \theta) &= J_3\left(\frac{\kappa_3^{(1)}}{R} r\right) \cdot \frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)}; \\ \psi_{9,10}(r, \theta) &= J_1\left(\frac{\kappa_1^{(2)}}{R} r\right) \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}; & \psi_{11,12}(r, \theta) &= J_1\left(\frac{\kappa_1^{(3)}}{R} r\right) \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \end{aligned}$$

де  $J_n(x)$  – функція Беселя,  $n$  – коловий номер, а  $\kappa_n^{(j)}$  обирається як корінь рівняння  $J_n(\kappa_n^{(j)}) = 0$  кратності  $j$ . Потенціал Стокса-Жуковського в цьому випадку має вигляд

$$\vec{\Omega}_0 = \{-A \sin \theta; A \cos \theta; 0\}, \quad \text{де } A = 4R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[ \cosh \frac{\kappa_n z}{R} - \cosh \frac{\kappa_n (z+H)}{R} \right] J_1 \left( \frac{\kappa_n r}{R} \right)}{\kappa_n (\kappa_n^2 - 1) \sinh \frac{\kappa_n z}{R} J_1(\kappa_n)}.$$

Виключення нелінійної кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини здійснюється та основі методів Гальоркіна і нелінійної механіки [4]. З теореми Лагранжа відомо, що безвихровий рух ідеальної нестисливої однорідної рідини повністю визначається рухом її границь, тобто кількість ступенів вільності руху всього об'єму рідини з вільною поверхнею дорівнює кількості ступенів вільності руху самої вільної поверхні. Виходячи з цього, обираємо змінну  $\xi$  за базовий параметр системи, який характеризує рух рідини з вільною поверхнею, а  $\phi$  та  $\vec{\Omega}$  вважаємо залежними змінними. Виходячи з розкладів (3) вибір незалежних параметрів здійснюється наступним чином: сукупність амплітудних параметрів розкладу збурення вільної поверхні рідини в ряд по формам власних коливань рідини  $\psi_i$  розглядається як незалежна система параметрів, а параметри розкладів скалярної  $\phi$  та векторної  $\vec{\Omega}$  складових потенціалу швидкостей, відповідно  $b_i$  та  $\vec{q}_i$ , розглядаються як залежні від параметрів  $a_i$ . З незалежності хвильових рухів рідини, поступального і кутового руху бака, які відповідають різним ступеням вільності системи, кінематична гранична умова на вільній поверхні розпадається на чотири незалежні. При цьому сукупність амплітудних параметрів  $a_i$  повністю характеризує кінематику рідини з вільною поверхнею.

Відповідно з кінематичної граничної умови на вільній поверхні

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{\nabla} \xi \cdot [\vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega} \times \vec{r}] = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial z} - \dot{\varepsilon}_z - (\vec{\omega} \times \vec{r})_z \quad \text{при } z = \xi, \quad (6)$$

можна одержати одну скалярну і три векторні граничні умови для різних змінних, які відповідають незалежним ступеням вільності. Для визначення функціональної залежності  $b_i$  та  $\vec{q}_i$  від параметрів  $a_i$  розглянемо кінематичні граничні умови на вільній поверхні рідини

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

та для зв'язку з векторною складовою потенціалу швидкостей  $\vec{\Omega}$

$$\vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\nabla} \Omega_k - \frac{\partial \Omega_k}{\partial z} + \vec{i}_k \cdot (\vec{i}_3 \times \vec{r}) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Тут введено позначення  $\Omega_k$  для компонент векторної складової потенціалу швидкостей  $\vec{\Omega}$ , і, таким чином, кінематична гранична умова (6) з точки зору механічних параметрів  $a_i$  являє собою одну неголономну (7) та три голономні (8) механічні в'язі. Далі процедура визначення залежності  $b_i$  та  $\vec{q}_i$  від параметрів  $a_i$

здійснюється на основі методу Гальоркіна. Для поступального руху резервуара така складова потенціалу визначається членом  $\dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{r}$ , де  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки  $O$ . В кінематичні граничні умови (7) та (8) підставляємо розклади змінних (3), множимо отримані вирази на компоненти повної ортогональної системи функцій  $\psi_p$  на незбуреній вільній поверхні рідини та інтегруємо отримане співвідношення по  $S_0$ . При цьому гіперболічні функції розкладаємо в ряд по  $\xi$  в околі  $\xi = 0$ , а вже потім здійснюємо інтегрування. Для зручності представимо залежні змінні  $b_i$  та  $\bar{q}_i$  у вигляді розкладів за порядками малості

$$b_n = b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + b_n^{(3)} + b_n^{(4)}; \quad \bar{q}_n = \bar{q}_n^{(1)} + \bar{q}_n^{(2)} + \bar{q}_n^{(3)}.$$

Після виконання вказаної процедури вирази залежних змінних  $b_i$  та  $\bar{q}_i$  від  $a_i$  будуть мати вигляд

$$b_i = \dot{a}_i + \sum_{n,m} \dot{a}_n a_m \gamma_{nmi}^w + \sum_{n,m,l} \dot{a}_n a_m a_l \delta_{nml}^w + \sum_{n,m,l,k} \dot{a}_n a_m a_l a_k h_{nmlki}^w; \quad (9)$$

$$\bar{q}_p = \sum_j a_j \bar{\beta}_{jp}^u + \sum_{j,k} a_j a_k \bar{\gamma}_{jkp}^u + \sum_j a_j a_k a_l \bar{\delta}_{jklp}^u. \quad (10)$$

Коефіцієнти в цих рівняннях являють собою квадратури від функцій  $\psi_p$  та  $\bar{\Omega}_0$ , які обчислюються по відомій області  $S_0$  [4]. Таким чином знайдені аналітично з точністю до величин четвертого порядку малості залежності (9), (10) фактично є виключенням нелінійної кінематичної граничної умови на збуреній вільній поверхні для довільної кількості форм коливань рідини, що розглядаються.

Після виключення всіх кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини побудова дискретної моделі сумісного руху резервуару та рідини з вільною поверхнею здійснюється на основі методу Канторовича, який застосовується до варіаційного формулювання задачі динаміки системи у формі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Далі, після підстановки у вираз функції Лагранжа (2) виразів (9) та (10) для параметрів  $b_i$  та  $\bar{q}_i$  через  $a_i$  отримаємо перетворену функцію Лагранжа вільної механічної системи у параметрах  $a_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\alpha_i$  [4]

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \rho \sum_i \dot{a}_i^2 \alpha_i^v + \frac{1}{2} \rho \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \beta_{ij}^v + \frac{1}{2} \rho \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \gamma_{ijk}^v + \frac{1}{2} \rho \sum_{i,j,k,l} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k a_l \delta_{ijkl}^v + \\ & + \frac{1}{2} \rho \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left( I_T^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \rho \sum_{p=1}^3 \omega_p \left( \sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\ & + \rho \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \sum_i \dot{a}_i \bar{B}_i^1 + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 + \sum_{i,j,k,l} \dot{a}_i a_j a_k a_l \bar{B}_{ijkl}^4 \right\} + \\ & + \rho \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left( \bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 + \sum_{i,j} a_i a_j a_k \bar{F}_{pijk}^4 \right) + \frac{1}{2} (M_T + M_F) (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho g (\cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) + \\
 & + \rho g (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) - (M_T + M_F) g \varepsilon_z + \\
 & + \frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \sum_i a_i^2 N_i - \sigma \cos \theta_1 \sum_i a_i \lambda_i - \frac{\sigma}{2} \sum_i a_i^2 \kappa_i^2 N_i - \\
 & - \frac{\sigma}{8} \sum_{i,j,k,l} a_i a_j a_k a_l \delta_{ijkl}^4 - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - (M_T h_T + M_F h_F) g (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) - \\
 & - (M_T h_T + M_F h_F) g (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi}. \tag{11}
 \end{aligned}$$

У співвідношенні (11) використано припущення про малість кутів нахилу і кутових швидкостей резервуару. Функція Лагранжа у вигляді (2) неоднорідна по своїй природі, оскільки описує сумісний рух системи з нескінченним числом ступенів вільності – рідини, та твердого тіла з скінченим числом ступенів вільності – резервуара. Перехід від співвідношення (2) до співвідношення (11) можна розглядати як перехід від дискретно-континуальної структури реальної системи до деякої моделі із скінченим числом ступенів вільності. Оскільки тепер функція Лагранжа відповідає вільній системі рівняння моделі одержуються як відповідні рівняння Лагранжа другого роду відносно амплітудних параметрів коливань вільної поверхні рідини і параметрів поступального і кутового руху резервуара.

$$\begin{aligned}
 \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} &= -\ddot{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} - \\
 - \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left[ E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] \right\} &+ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk}^4 + \\
 + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[ \sum_i \dot{a}_i (E_{pir}^{2*} - E_{pri}^{2*}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (E_{pijr}^{3*} + E_{pirj}^{3*} - E_{prij}^{3*} + E_{prji}^{3*}) \right] &+ \\
 + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left[ E_{psr}^2 + \sum_i a_i (E_{psir}^3 + E_{psri}^3) \right] &+ \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left[ E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] + \\
 + \dot{\varepsilon} \cdot \left[ \sum_i a_i \vec{D}_{ir}^2 + \sum_i \dot{a}_i a_j \vec{D}_{ijr}^3 + \sum_i \dot{a}_i a_j a_k \vec{D}_{ijk}^4 \right] &+ \frac{1}{2\alpha_r^v} \dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[ \vec{F}_{pr}^2 + \sum_i a_i (\vec{F}_{pir}^3 + \vec{F}_{pri}^3) + \right. \\
 + \sum_{i,j} a_i a_j (\vec{F}_{pijr}^4 + \vec{F}_{pirj}^4 + \vec{F}_{prij}^4) \left. \right] &+ g \frac{N_r}{\alpha_r^v} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 a_r + g \frac{\alpha_r^c}{\alpha_r^v} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \\
 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 + g \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3). \tag{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_i \ddot{a}_i \left( \vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) + \ddot{\vec{\varepsilon}} + \\
 & + \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left[ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left( \vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_j a_k \vec{F}_{pij}^3 \right) \right] = \\
 & = \frac{\vec{F}}{M_F + M_T} + \vec{g} + \frac{\rho}{M_F + M_T} \left( \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) - \\
 & - \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left( \sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \right) - \\
 & - \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left( \vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 \right); \tag{13} \\
 & \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} + \\
 & + 2 \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left[ \vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + \sum_i a_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[ 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] = \\
 & = 2 \sum_{p,s=1}^3 \left( \omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left( \frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\
 & + \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
 & + 2 \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left( \vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) + \\
 & + 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left( \sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\
 & + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left( \sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) + \\
 & + \frac{2g}{\rho} (M_T h_T + M_F h_F) \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \\
 & + 2g \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[ (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) + \right. \\
 & \left. + (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left( \sum_i a_i \alpha_i^s + Hl^s \right) \right] + \frac{2}{\rho} M_{ex}^r. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Система рівнянь руху (12)–(14) в параметрах  $a_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\alpha_i$  доповнена узагальненими дисипативними силами, розрахованими на основі результатів робіт [1]. Величини  $\varepsilon_i$  вважаються скінченими, а  $a_i$  та  $\alpha_i$  утримано з точністю до величин третього порядку малості включно. Система складається з  $N$  рівнянь другого порядку, де  $N$  – кількість прийнятих до розгляду форм коливань рідини, і описує нелінійну динаміку сумісного руху конструкції з рідиною з вільною поверхнею при поступальних і кутових рухах конструкції-носія. В рівняння руху (12)–(14) входять індексні вирази, які характеризують інерційні та статичні характеристики конструкції, в'язей в системі, зовнішні сили та моменти, які діють на конструкцію. При цьому всі ці коефіцієнти обчислюються в квадратурах від форм коливань вільної поверхні рідини  $\psi_i$  та потенціалів Стокса-Жуковського [4] і їх вирази через громіздкість тут не приводяться.

## 2. Аналіз прояву нелінійних механізмів хвилеутворення

Для аналізу закономірностей формування нелінійних механізмів хвилеутворення розглянемо випадок руху циліндричного резервуару на маятниковому підвісі, маса якого  $M_T = 0,1M_F$ , рівень заповнення рідиною (водою)  $H = 2$  м, радіус циліндра  $R = 1$  м, а його висота  $H_{cyl} = 2.5R$ . Розглядалося два варіанта довжин підвісу  $L = R$  (варіант, коли відбувається суттєве зміщення першої резонансної частоти [2, 5]) і  $L = 8R$  (варіант наближений до випадку розміщення частот подібно поступальному руху). Аналізувалися випадки моделювання кутового відхилення резервуара, збудження першої антисиметричної форми за лінійним і нелінійним законами, збудження першої осесиметричної ( $m=0$ ) форми коливань і форми коливань з коловим номером 2 ( $m=2$ ), які відбуваються лише в рамках нелінійного моделювання. У випадку короткої довжини підвісу  $L = R$  розглядалося моментне збудження коливань резервуара в околі нижчої частоти сумісних коливань (яка є близькою до маятникових коливань системи) з частотою і амплітудою  $\omega = 2.3 \text{ s}^{-1}$  (точне значення резонансної частоти 2.48);  $M_x = 2290 \cos(\omega t)$ . Для довшої довжини підвісу  $L = 8R$  приймалося  $\omega = 1.2 \text{ s}^{-1}$   $\omega = 2.3 \text{ s}^{-1}$  (точне значення резонансної частоти 1.06);  $M_x = 15000 \cos(\omega t)$  При цьому в обох випадках амплітуда обиралася так, щоб максимальні коливання на



вільній поверхні рідини відбувалися у околі значень  $\xi = 0.3 R$ . В початковий момент приймалося, що рідини знаходиться у стані спокою.

На рис. 1 наведено порівняння результатів лінійного і нелінійного моделювання для кута відхилення підвісу (а) і амплітуд збудження першої антисиметричної форми  $a_1$  (б). Для (а) нелінійний варіант показано штриховою лінією, а лінійний – суцільною. У варіанті (б) суцільна тонка лінія відповідає нелінійному варіанту, а штрихова товста – лінійному. На рис. 2 показано зміну в часі амплітуд коливань за формами з коловими номерами  $m=0$  ( $a_3$ ) і  $m=2$  ( $a_5$ ), які збуджуються лише в рамках нелінійної моделі. При лінійному моделюванні збуджуються лише антисиметричні форми ( $m=1$ )

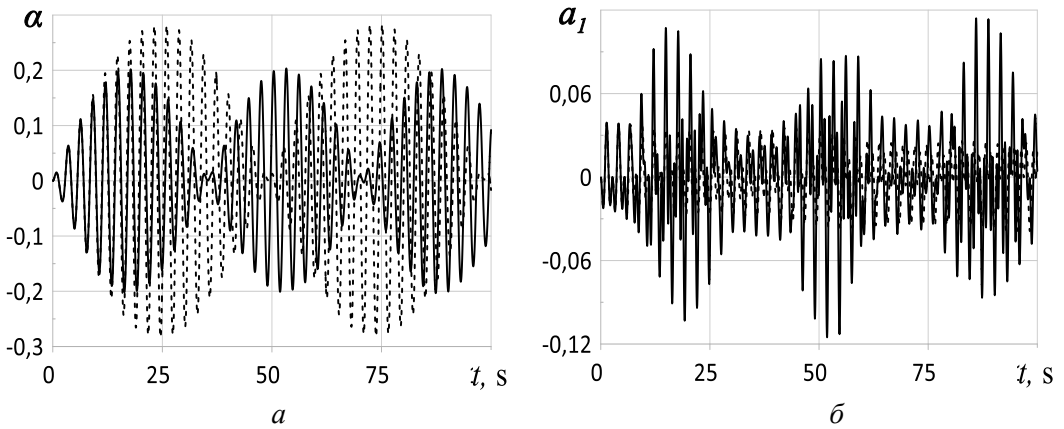


Рис. 1. Порівняння випадків лінійного і нелінійного моделювання для кута відхилення підвісу (а) і амплітуд збудження першої антисиметричної форми (б)

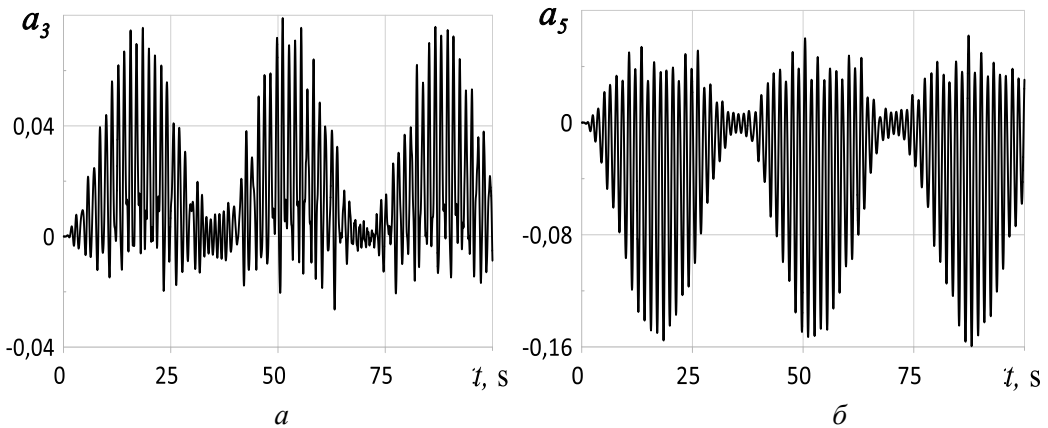


Рис. 2. Зміна в часі амплітуд коливань за першою осесиметричною ( $m=0$ ) формою (а) і формою коливань з коловим номером  $m=2$  (б)

Як свідчать результати чисельного моделювання, прояв нелінійностей на кутові коливання резервуара є незначним, хоча як амплітуди, так і частоти кутових коливань змінилися. В той же час коливання вільної поверхні рідини зазнали значних якісних і кількісних змін. З рис. 2 б випливає, що відмінність коливань за лінійною моделлю (збуджуються лише антисиметричні форми) значно відрізняється від результатів

нелінійного моделювання. Подібна різниця в поведінці для випадку чисто поступального руху конструкції-носія проявляється набагато слабкіше. До того ж у результат формування хвиль значний внесок мають форми коливань з коловими номерами 0 і 2. Аналіз рівнянь руху свідчить, що ці форми збуджуються через входження до рівнянь квадратичних членів від антисиметричної форми  $a_1$ . Відомо, що такий тип нелінійностей зветься радіаційним і відрізняється несиметричним законом зміни параметрів відносно нульового рівня, що відразу помітно з рис. 2 а і 2 б. Важливо відзначити, що зміна  $a_3$  і  $a_5$  є різнополярною. Нормування власних функцій  $\psi_k$  здійснюється таким чином, що на стінці резервуара вони відповідають одиничному додатному відхиленню. Отже ці функції взаємно гасять одна одну на стінці, а в центрі резервуару функція  $a_3$  обумовлює опускання ( $a_5$  в центрі має нульове значення), що призводить до прояву відомої властивості – несиметричність профіля хвиль на вільній поверхні рідини (що не відображає лінійна модель). При цьому на відміну від лінійного випадку дольовий внесок функції  $a_1$  стає співрозмірним із внеском  $a_3$  і  $a_5$  а не домінуючим як у випадку поступального руху резервуара.

Аналогічні результати буди одержані для довгого підвісу  $L = 8R$  (рис. 3 і 4). Як відомо [2, 5] для обраного короткого підвісу  $L = R$  частота коливань за першою антисиметричною формою займає четверте місце, а для довшого підвісу  $L = 8R$  вона займає друге місце (найменші значення частот відповідають маятниковим коливанням резервуара з рідиною). Якісно загальна картина поведінки системи не змінилася, однак більш помітним стає несиметричність розвинення коливань за амплітудами  $a_3$  і  $a_5$ .

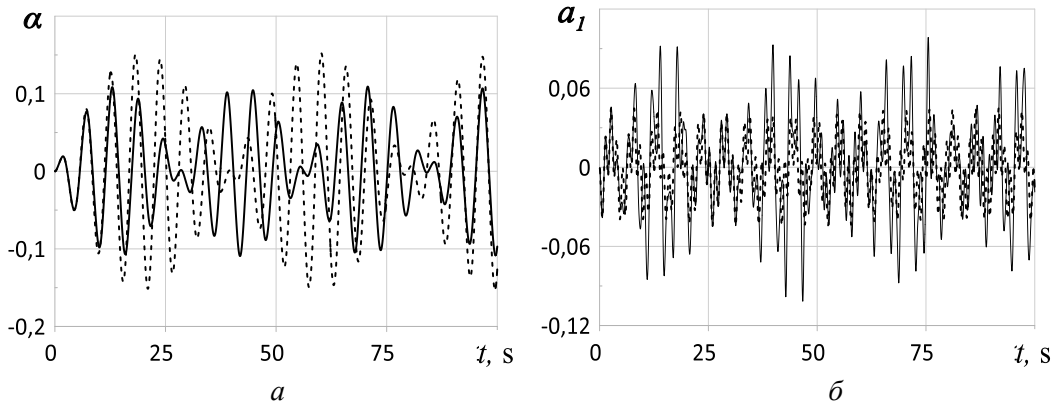


Рис. 3. Порівняння випадків лінійного і нелінійного моделювання для кута відхилення підвісу (а) і амплітуд збудження першої антисиметричної форми (б)

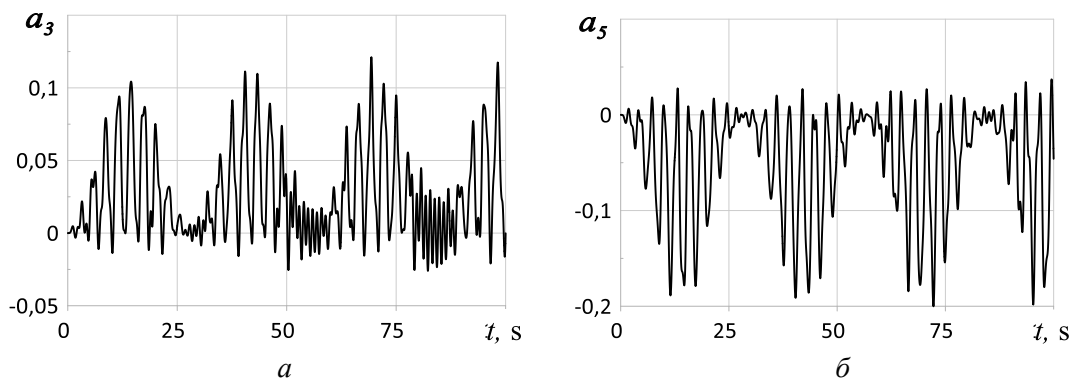


Рис. 4. Зміна в часі амплітуд коливань за першою осесиметричною ( $m=0$ ) формою (а) і формою коливань з коловим номером  $m=2$  (б)

**Висновки.** При аналізі задачі про вимушені нелінійні сумісні коливання циліндричного резервуара з рідиною з вільною поверхнею на маятниковому підвісі під дією гармонічного моменту, прикладеного до резервуару, встановлено, що результати лінійного і нелінійного моделювання мають суттєві кількісні і якісні відмінності. Ці відмінності менш значно проявляються для кутового руху резервуара, проте для хвиль на вільній поверхні рідини вони є значними. Показано, що для нелінійного випадку через розвинення коливань не лише за антисиметричними формами (як у лінійному випадку), а ще й за осесиметричною формою і формою, яка відповідає коловому номеру 2 (які збуджуються через так званий радіаційний механізм) внесок антисиметричної форми вже не є домінуючим. Встановлено, що залучені за нелінійним механізмом форми визначають несиметричність профілів хвиль на вільній поверхні рідини, а для прийнятого типу збудження коливань в околі першої резонансної частоти вони взаємно гасять одна одну на стінках резервуара. Подібний ефект проявляється на коротких і середніх довжинах маятникового підвісу.

## Література

1. Микишев Г.Н. *Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов.* – Москва: Машиностроение, 1978. – 247 с.
2. Konstantinov A.V., Limarchenko O.S., Lukyanchuk V.V., Nefedov A.A. *Dynamic methods of damping the oscillation in structure-free-surface fluid system, Int. Appl. Mech.*, 2019. – 55, N 1. – P. 58-67.
3. Limarchenko O.S. Specific features of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of a liquid with free surface in cavities of noncylindrical shape // *Ukrainian Mathematical Journal.* – 2007. – 59, N 1. – P. 45-69.
4. Limarchenko O.S., Matarazzo G. *Rotational motion of structures with tanks partially filled with liquid,* – FADA Ltd. Kiev, 2003. – 286 p.
5. Limarchenko O.S., Semenovich K.O. *Energy redistribution between the reservoir and liquid with free surface for angular motions of the system // J. of Mathem. Sci.* – 2017. – 222, N 3. – P. 296 – 303.
6. Onorato M., Vozella L., Proment D., Lvov V. *Route to thermalization in the  $\alpha$ -Fermi – Pasta – Ulam system // PNAS.* – 2015. – 112, N 14. – P. 4208 – 4213.

## Specificity of manifestation of nonlinearities for angular oscillations of the reservoir with liquid. Harmonic disturbance

Oleg Limarchenko, Katerina Semenovich

*The problem about forced nonlinear combined oscillations of the cylindrical reservoir with the liquid with a free surface on a pendulum suspension under harmonic disturbance of the reservoir is under consideration. The results of linear and nonlinear modeling of the system behavior for harmonic disturbance of the reservoir on the pendulum suspension in a vicinity of the first resonant frequency were studied for two lengths of the pendulum suspension. It was shown that results of linear and nonlinear suspensions have considerable qualitative and quantitative differences. Differences and reasons of their origination were analyzed. A specific character of interaction of two normal modes, which in addition to the first antisymmetric normal modes are excited due to nonlinear radiation effect in the system. As a result these normal modes partially kill each other on the reservoir walls and condition nonsymmetric character of waves profiles of a free surface of the liquid.*

**Key words:** ideal liquid, free surface, reservoir on pendulum suspension, combined motion, analysis of nonlinear effects of wave generation

Отримано 12.06.24