УДК 537.8
doi.org/10.15407/fmmit2024.39.084

Зміна магнітної проникності неоднорідного матеріалу за рахунок включень з поверхневим імпедансом

Михайло Андрійчук[1,2], Борис Євстигнєєв[1]
[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
[2]Національний університет Львівська політехніка
andr@iapmm.lviv.ua, molnerats@gmail.com

Ми застосовуємо аналітично-числовий метод для розв'язання задачі розсіяння на сукупності хаотично розміщених частинок в однорідному матеріалі. Припущення про малість частинок дозволяє використати для цієї задачі асимптотичний метод. Аналітична частина розв'язку полягає в отриманні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) щодо значень невідомої допоміжної функції. Чисельний розв’язок цієї СЛАР дозволяє визначити розв’язок початкової задачі дифракції, а також вивести явну формулу для магнітної проникності отриманого неоднорідного матеріалу. Числові дані свідчать про можливість одержати більш контрастний розподіл магнітної проникності на відміну від регулярного розміщення вбудованих включень.

Ключові слова: Неоднорідний матеріал, мікровключення, імпедансні граничні умови, асимптотичний метод, магнітна проникність.

Вступ. Створення матеріалів зі специфічними акустичними та електромагнітними (ЕМ) параметрами відіграє вирішальну роль у модернізації антен, радарів, систем передачі, інтегральних схем тощо. Такі матеріали забезпечують покращення випромінювальних властивостей антен і радарів, дозволяють зменшити зворотне розсіювання об'єктів безпеки, знизити втрати у хвилеводах та передавальних системах. З фізичної точки зору вони характеризуються специфічними значеннями діелектричної і магнітної проникностей і зазвичай називаються метаматеріалами.

Дослідження властивостей метаматеріалів почалося з теоретичної роботи Веселаго [1], а їх інженерна реалізація була запропонована пізніше Пендрі та Смітом [2]. Метаматеріали зазвичай виготовляють шляхом вбудовування набору малих тіл-розсіювачів (таких як металеві кільця та стрижні, або сферичні магніто-діелектричні частинки) у формі регулярної решітки; в результаті отримуючи бажані властивості [3-5]. В інженерному плані цього можна досягнути шляхом «розумного» розміщення електрично малих розсіювачів у двовимірній області на поверхні або межі розділу. Така реалізація метаматеріалів спочатку отримала назву метаплівки [6], що конкретно визначає поверхневий розподіл електрично малих розсіювачів. Слід зазначити, що окремі включення, які утворюють метаплівку, не обов’язково є «нульової товщини» або навіть малими порівняно з розмірами масиву. Ці розсіювачі можуть мати довільну форму і бути меншими відносно довжини хвилі в навколишньому матеріалі.

Теоретичне передбачення щодо можливості створення такого роду матеріалів сформулював Рамм в [7]; ця концепція використовує вміщення малих

імпедансних або ідеально провідних частинок в однорідне середовище/матеріал, що призводить до зміни його матеріальних параметрів. Виявилося, що ця ідея є привабливою і для випадку акустичних хвиль, при цьому можна змінити показник заломлення початкового однорідного середовища. Така реалізація дозволяє отримати його від'ємні значення [8], що важливо при проектуванні матеріалів з мінімальним рівнем зворотного розсіювання.

Попередні результати були пов'язані з вивченням властивостей зворотного розсіювання та здатності створювати неоднорідні матеріали зі специфічною магнітною проникністю шляхом регулярного вміщення сукупності малих імпедансних частинок. Згідно цих досліджень, результуюча магнітна проникність суттєво змінюється у порівнянні зі значеннями початкового однорідного матеріалу. Мета даної роботи — продемонструвати, що випадок хаотично вбудованих частинок забезпечує ще більшу зміну результуючої магнітної проникності.

1. Задача розсіювання для неоднорідного матеріалу

Нехай сукупність D_m частинок малого розміру розміщено в області D з матеріальними параметрами ε_0, μ_0, а $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$; ω – частота ЕМ поля. Геометрію задачі наведено на рис. 1. Параметр b характеризує максимальний розмір (діаметр) частинки

$$b = \max_{1 \le m \le M} (\text{size} D_m), \tag{1}$$

де $1 \le m \le M$. Малий розмір області D_m визначається співвідношенням $kb \ll 1$, k – хвильове число в оточуючій області D.

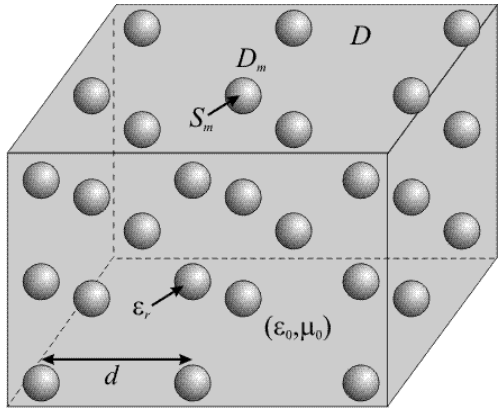

Рис. 1. Геометрія області з включеннями.

Функція $p(x)$, яка визначає густину розміщення включень в підобласті $\Delta \in D$, визначається формулою

$$\mathrm{N}(\Delta) = [1 + o(1)](1/b^{2-\nu}) \int_{\Delta} p(x)dx\,, \tag{2}$$

де $\mathrm{N}(\Delta)$ – кількість включень у Δ; $p(x) \geq 0$ – неперервна в D, вона набуває нульових значень поза областю D.

Поверхневий імпеданс частинок D_m визначається як

$$\zeta_m(x_m) = h(x_m)/b^{\nu}\,, \tag{3}$$

де функція $h(x_m)$ довільна і неперервна. Отже, обидві функції $h(x)$ і $p(x)$ є довільними, що дає в результаті можливість отримати бажані значення коефіцієнта рефракції і магнітної проникності в області D.

Задача електромагнітного розсіювання полягає у визначенні векторів $\mathbf{E}$ і $\mathbf{H}$ ЕМ поля, які задовольняють систему рівнянь Масквелла

$$\Delta \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}\,,\ \Delta \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{4}$$

в області $D = R^3 \setminus \bigcup_{m=1}^{M} D_m$.

Розв'язок задачі запишемо у вигляді

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s\,,\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s\,. \tag{5}$$

Вектори $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$ відповідають падаючому полю, яке задовольняє рівняння (4) в області $\mathrm{R}^3 \setminus D$; $\mathbf{E}_s$ і $\mathbf{H}_s$ — значення розсіяного поля.

Імпедансні граничні умови на межі S_m області D_m запишемо у вигляді

$$(\mathbf{N} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{N})) = \zeta_m (\mathbf{N} \times \mathbf{H})\,. \tag{6}$$

Функція $\zeta_m(x_m)$ – граничний імпеданс, вона визначається згідно (3), $x_m \in D_m$; $\mathbf{N}$ – зовнішня нормаль області D_m.

У даній роботі ми обмежимося випадком постійного імпедансу ζ_m, і вважатимемо, що $\mathrm{Re}(\zeta_m) \geq 0$; останнє обмеження не суперечить визначенню (3). Нехай падаюче поле визначається формулою

$$\mathbf{E}_i = \beta e^{ik(\alpha \cdot \mathbf{x})}\,, \tag{7}$$

де вектор β – постійний, $\alpha \in S^2$ – одиничний вектор, $S^2 \in \mathrm{R}^3$ – одинична сфера. Вектори α і β повинні задовольняти умову $(\alpha \cdot \beta) = 0$.

Якщо використати співвідношення

$$\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{i\omega\mu_0}, \tag{8}$$

то ми отримаємо

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = 0, \tag{9}$$

яке виконується у всій області D.

Тому задачу (4) – (6) можна розглядати як визначення вектора $\mathbf{E}(x)$, використовуючи (9) з урахуванням граничних умов (6).

2. Розв'язок задачі розсіювання

Розв'язок задачі (4) – (6) чи (9) для випадку регулярного розміщення включень запропоновано в [9]. Його отримання фактично не залежить від способу розміщення включень в області D, тому ми використаємо тут аналогічний спосіб отримання розв'язку.

Використовуючи [9], подамо розв'язок задачі розсіювання у вигляді

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_i(x) + \sum_{m=1}^{M} [\nabla_x g(x, x_m), Q_m] + \sum_{m=1}^{M} \nabla \times \int_{S_m} (g(x, x_m) - g(x, y)) P_m(y) dy, \tag{10}$$

де

$$Q_m = \int_{S_m} P_m(y) dy. \tag{11}$$

Згідно [8] $P_m(y) = O(b^{-\nu})$, тому $Q_m = O(b^{2-\nu})$. Використовуючи останнє співвідношення, ми зведемо (10) до вигляду

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_i(x) + \sum_{m=1}^{M} [\nabla_x g(x, x_m), Q_m] + o(1). \tag{12}$$

Використовуючи означення асимптотичного (ефективного) поля [7], можна не враховувати член при $m = j$ в (12), при цьому (12) зводиться до вигляду

$$\mathbf{E}(x) \simeq \mathbf{E}_i(x) + \sum_{m=1, m\neq j}^{M} [\nabla_x g(x, x_m), Q_m], \tag{13}$$

Остання формула дозволяє отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для визначення допоміжних векторів $\mathbf{U}$ (18). Формула (13) також дозволяє отримати інтегральне рівняння Фредгольма для векторів $\mathbf{E}(x)$ [9]

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_i(x) + \frac{\eta}{i\omega\mu_0} \nabla \times \int_D g(x, y) p(y) h(y) \mathbf{A}(\nabla \times \mathbf{E}(y)) dy. \tag{14}$$

Параметр η характеризує форму включення і не залежить від його розміру. Оператор $\mathbf{A}=\mathbf{I}-\mathbf{B}$, оператор $\mathbf{I}$ – одинична матриця розміру 3×3, числа $b_{ij}, i, j=1,2,3$ – 3×3 матриця, які визначають оператор $\mathbf{B}$ в [9]. Останнє рівняння дає можливість вивести явну формулу для змінної магнітної проникності отриманого неоднорідного матеріалу.

3. Розв'язок допоміжної СЛАР

Знайдемо додаткові величини Q_m, які використаємо для визначення вектора $\mathbf{E}$. Введемо додаткову вектор-функцію

$$\mathbf{U}_m=(\nabla\times\mathbf{E})(x_m). \tag{15}$$

З її використанням запишемо

$$\mathbf{Q}_m=\frac{\zeta_m\eta_m}{i\omega\mu_0}b^{2-\nu}h(x_m)\mathbf{A}(\mathbf{U}_m), \tag{16}$$

де параметр η_m визначає форму включення. Наприклад, для сфери цей параметр $4/3\pi$, а для еліпсоїда з осями a,b,c він визначається як

$$\eta_m=4\pi\sqrt[p]{\frac{t_1^p+t_1^pt_2^p+t_2^p}{3}}, \tag{17}$$

$b=t_1a, c=t_2a$, $p=1.6075$. якщо вектори $\mathbf{Q}_m$ знайдено, то вектор $\mathbf{E}$ визначається з допомогою (13).

Щоб отримати СЛАР для визначення $\mathbf{U}_m$, подіємо оператором ∇ на рівняння (14), використовуючи сумування $\sum_{m=1,m\neq j}^{M}$ замість $\sum_{m=1}^{M}$ і в силу (15), (16), ми отримуємо СЛАР

$$\mathbf{U}_j=\mathbf{U}_{ij}+\frac{\zeta_m\eta_m}{i\omega\mu_0}b^{2-\nu}\times\sum_{m\neq j,m=1}^{M}h(x_m)\nabla_x[\nabla_x g(x_j,x_m)\mathbf{A}(\mathbf{U}_m)]. \tag{18}$$

Тому значення $\mathbf{U}_{ij}$ і $\mathbf{U}_j$ визначаються за формулою

$$\mathbf{U}_{ij}=\nabla\times\mathbf{E}_i(x_j), \mathbf{U}_j=\nabla\times\mathbf{E}(x_j). \tag{19}$$

4. Магнітна проникність неоднорідного матеріалу

Використовуючи рівняння (14), виведемо явні формули для магнітної проникності $\mu(x)$ і коефіцієнта рефракції $n^2(x)$ нового неоднорідного матеріалу. Подіявши оператором $\nabla\times\nabla\times$ на рівняння (14), отримаємо

$$[\nabla\times[\nabla\times E(x)]]=k^2E(x)-\frac{\eta}{i\omega\mu_0}\nabla\times(h(x)p(x)A(\nabla\times E(x)))\,. \tag{20}$$

При цьому ми використали відому формулу $\nabla\cdot\nabla\times=0$ і співвідношення

$$\nabla^2 g(x,y)-k^2 g(x,y)=\delta(x-y)\,,$$

а також факт, що $h(x)$ – скалярна функція. Використовуючи (20), ми отримаємо

$$[\nabla\times[\nabla\times E(x)]]=\frac{k^2}{1+\dfrac{\eta}{i\omega\mu_0}A(h(x)p(x))}-\frac{\eta}{i\omega\mu_0}\frac{\nabla(h(x)p(x)\times(\nabla\times E(x)))}{\dfrac{k^2}{1+\dfrac{\eta}{i\omega\mu_0}A(h(x)p(x))}}, \tag{21}$$

де

$$K^2(x)=\frac{k^2}{\dfrac{\eta}{i\omega\mu_0}A(h(x)p(x))} \tag{22}$$

Можна переконатися, що

$$\nabla\times\nabla\times E(x)=K^2(x)E(x)+\left(\frac{\nabla\mu(x)}{\mu_0}\times(\nabla\times E(x)\right), \tag{23}$$

використовуючи оператор $\nabla\times$ до $\nabla\times E=i\omega\mu(x)H$, $\nabla\times H=-i\omega\varepsilon(x)E$, і підставляючи $k^2(x)=\omega^2\varepsilon(x)\mu(x)$.

Якщо порівняти рівняння (21) і (23), то видно, що останній доданок у (21) з'являється через нову магнітну проникність $\mu(x)$. Це значення $\mu(x)$ виникає завдяки появі поверхневих струмів на S_m. Явна формула для нового значення $\mu(x)$ отримується наступним чином. Введемо функцію

$$\Psi(x)=1-\frac{\eta}{i\omega\mu_0}A(p(x)h(x))\,. \tag{24}$$

Для випадку $\varepsilon(x)=\varepsilon_r\varepsilon_0=\text{const}$ (ε_r – відносна діелектрична проникність області D) ми дістанемо

$$\mu(x)=\mu_0/\Psi(x)\,, \tag{25}$$

таким чином, $K^2(x)=\omega^2\varepsilon\mu(x)$.

Отримані формули дають нове значення магнітної проникності

$$\mu(x)=\mu_0/\Psi(x)=\frac{\mu_0}{1-\dfrac{\eta}{i\omega\mu_0}A(h(x)p(x))} \tag{26}$$

та хвильового числа

$$K^2(x)=\omega^2\varepsilon\mu(x) \tag{27}$$

неоднорідного середовища з вбудованими включеннями, при цьому коефіцієнт рефракції визначається як $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu(x)}$. Значення ε_0 замінюється на ε, якщо розглядається початковий матеріал з відносною діелектричною проникністю ε_r, і $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$.

5. Результати числового моделювання

Числові розрахунки стосуються дослідження залежності магнітної проникності $\mu(x)$ від способу розміщення включень і таких параметрів, як їх розмір, мінімальна відстань між ними, частота ЕМ випромінювання та властивості матеріалу. Зауважимо, що застосовність асимптотичного підходу та його точність обговорювалися в попередніх роботах, наприклад у [10].

Значення фізичних параметрів задачі наступні:

- Електрична проникність вільного простору ε_0 = 8.854188 x 10^{-12} F/m (на рис. 2-3) або тефлону ε_0 = 1.859379 x 10^{-11} F/m (на рис. 4-5).
- Магнітна проникність вільного простору μ_0 = 1.256637 x 10^{-6} H/m або тефлону μ_0 = 1.2567 x 10^{-6} H/m.
- Вектор, що визначає напрямок падаючої хвилі α = (0, 0, 1).
- Постійний вектор β = (0, 1, 0) (тобто умова $(\alpha \times \beta) = 0$ задовольняється).
- Константа v = 0.9.
- Відстань між сусідніми включеннями $d = O(b)$.
- Функція $p(x) = Mb^{2-v}/|D|$, де M – кількість включень в D, а $|D|$ – об'єм області.
- Вектор $\mathbf{U}_i(x_m) = \nabla \times \beta e^{1k\alpha \cdot x}\Big|_{x=x_m}$.

Решта параметрів ω, b, M, і функція $h(x)$ – змінні задля визначення області застосування асимптотичного підходу [11].

На першому етапі проводилися числові розрахунки з метою порівняння характеристик збіжності ітераційного процесу розв'язання СЛАР (18) і впливу її розв'язку на точність визначення компонент $\mathbf{E}(x)$ ЕМ поля.

На рис. 2 показано залежність відносної похибки (Error, y) компоненти E_y від розміру частинок (Particle size) b при фіксованій відстані d між ними. Похибка як для хаотичного (chaotic), так і для регулярного (regular) розподілу частинок майже однакова, а їх різниця зростає зі збільшенням b. Залежність похибок від частоти (Frequency) ω при фіксованих b і d наведено на рис. 3. Значення похибок такого ж порядку, як і в попередньому випадку, але похибки зменшуються зі зростанням ω, і похибка для хаотичного розподілу також менша.

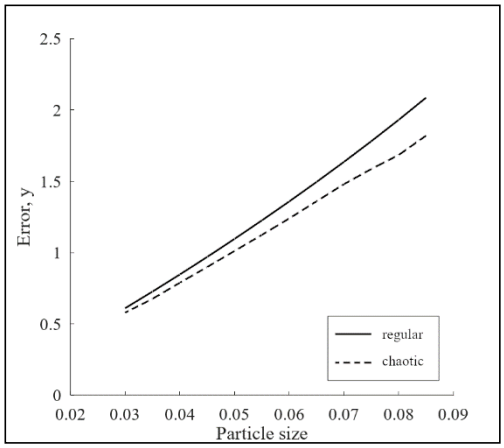

Рис. 2. Залежність похибки компоненти E_y від розміру включень b.

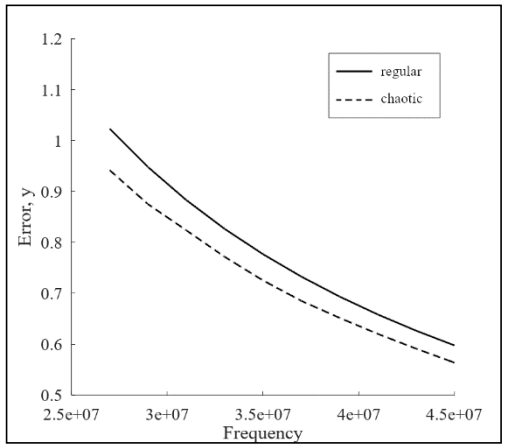

Рис. 3. Залежність похибки компоненти E_y від частоти ω.

На рис. 4 і 5 наведено результати моделювання кусково-постійної магнітної проникності μ при хаотичному розміщенні включень. Початкова область D розбита на 27 однакових підобластей, і в кожній підобласті Δ_m значення μ усереднювалося, оскільки в кожній з них розподіл включень також хаотичний. При цьому також усереднювалася відстань d між включеннями, що дає змогу використати явну формулу (26) для визначення μ. Результати наведено для частоти ЕМ поля $\omega = 4.5$ ГГц, розмір включень $b = 0.003$ см, відстань між включеннями $d \geq 0.04$ см.

На рисунках показано загальну схему розподілу проникності μ при фіксованих параметрах області D з різними підходами вбудовування частинок у початкову однорідну тривимірну область. Колірна карта відображає значення, які в підобластях Δ_m вважаються кусково-постійними. Область D (куб зі стороною 0.032 м) розбивається на 27 підобластей, кожна з яких містить фіксовану кількість частинок (розраховується постфактум під час створення хаотичного розподілу). Значення отриманих μ нормовані на величину μ_0 – магнітну проникність вільного простору. Результати, які зображено на рис. 4, отримано при повністю хаотичному розподілі включень, причому область D розбивалася на три горизонтальні підобласті (шари), і в кожній з них був свій локальний закон розміщення включень. Для результатів на рис. 5 хаотичний розподіл включень підпорядковується нормальному розподілу, тобто в центрі шару частинки розміщені густіше. Такий закон розподілу вибирався з міркувань певних технологічних способів реалізації неоднорідного середовища.

Як і очікувалося, спосіб розміщення частинок безпосередньо впливає на проникність μ, яка стає змінною. Якщо за повністю хаотичних розподілів μ незначно варіюється без будь-яких передбачуваних шаблонів, то розміщення

частинок випадковим чином за певним законом (як-от нормальний розподіл) дозволяє створювати бажані значення проникності в різних підобластях.

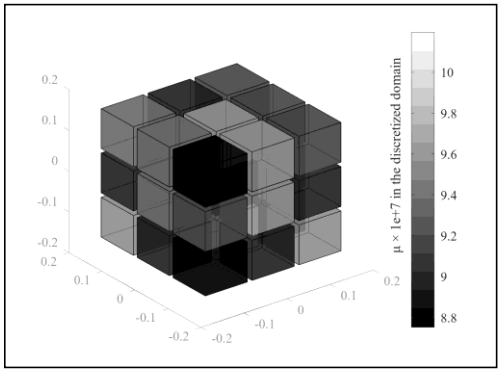

Рис. 4. Розподіл магнітної проникності μ при повністю хаотичному розміщенні включень.

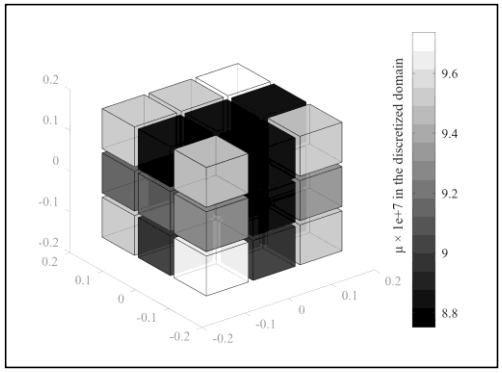

Рис. 5. Розподіл магнітної проникності μ при хаотичному розміщенні включень з нормальним розподілом.

Також вартий уваги **час обчислень**. Знаходження магнітної проникності за явною формулою (26) відбувається відносно швидко (до 10 секунд, залежно від потужності процесора), що відкриває шлях до розв'язання оберненої задачі: підібрати вхідні параметри, за яких з'являється бажане μ. Хоча явна обернена формула не існує і навряд чи може бути виведена, евристичні алгоритми виглядають тут ефективними.

Єдиною потенційною проблемою є витрати на розв'язання самої прямої задачі, яке одночасно є перевіркою застосовності асимптотичного підходу для конкретних вхідних параметрів. Із наших попередніх експериментів, перевірка збіжності займає 1-2 хвилини — значно більше, ніж застосування кінцевої формули. За вибору, скажімо, генетичного алгоритму, ми можемо зекономити час, якщо будемо робити перевірку лише на тих параметрах, що потенційно дають «кращу» магнітну проникність за вже досягнуту.

Висновки

Побудовано аналітично-числовий розв'язок задачі розсіювання ЕМ хвиль в матеріалі з набором вбудованих частинок малого розміру, розподілених хаотично. Використовуючи отриману явну формулу, розраховано значення магнітної проникності отриманої неоднорідної області. Числові результати демонструють можливість отримати бажану змінну магнітну проникність μ (а, отже, і показник заломлення n), що може бути використано з метою моделювання нових метаматеріалів. Числові експерименти демонструють ефективність методу, з перспективою постановки і розв'язання обернених задач, наприклад, за допомогою генетичних алгоритмів. Відповідна реалізація такого підходу є подальшою метою в цьому дослідницькому напрямку.

Література

[1] *Veselago V. G.*, The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of ε and μ. Usp. Fiz. Nauk, Vol. 92, 1967, 517-526.

[2] *Smith D. R., Padilla W J., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C. and Schultz S.*, Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity. Phys. Rev. Lett., Vol. 84, 2000, 4184-186.

[3] *Zouhdi S., Sihvola A. and Arsalane M.* (eds.). Advances in Electromagnetics of Complex Media and Metamaterials. Boston, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[4] *Engheta N. and Ziolkowski R. W.*, Electromagnetic Metamaterials: Physics and Engineering Explorations, Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 2006.

[5] *Lapine M. and Tretyakov S.*, Contemporary Notes on Metamaterials. IET Microwaves, Antennas, and Propagation, Vol. 1, No. 1, 2007, 3-11.

[6] *Kuester E. F., Mohamed M. A., Piket-May M. and Holloway C. L.*, Averaged Transition Conditions for Electromagnetic Fields at a Metafilm. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 51, No. 10, 2003, 2641-2651.

[7] *Ramm A. G.*, Materials with the desired refraction coefficients can be made by embedding small particles. Phys. Lett. A, Vol. 370, No. 5-6, 2007, 522-527.

[8] *Ramm A. G.*, A recipe for making materials with negative refraction in acoustics. Phys. Lett. A, vol. 372, Iss. 13, 2008, 2319-2321.

[9] *Andriychuk M.*, Asymptotic regularisation of the solution to the problem of electromagnetic field scattering from a set of small impedance particles. IET Microwaves, Antennas & Propagation, Vol. 15, No. 10, 2021, 1330-1346. DOI: 10.1049/mia2.12171.

[10] *Андрійчук М. І., Євстигнєєв Б. Є., А*симптотичний метод розв'язування задачі розсіювання електромагнітних хвиль на сукупності імпедансних частинок малого розміру. Мат. методи та фізико-механічні поля, Т. 65, № 3-4, 2022, 93-102.

[11] *Andriychuk M. and Yevstyhneiev B.*, Selection of Material Parameters in a Chaotic Small Particle Embedded Medium for Wave Scattering Design. In book: Chaos Theory – Recent Advances, New Perspectives and Applications. Andriychuk M. (Ed.). London: Intech Open, 2024, 59-78. http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.114175.

Change in magnetic permeability of inhomogeneous material due to particles with surface impedance

Mykhaylo Andriychuk, Borys Yevsyhneiev

We use an analytical-numerical method to solve the problem of scattering on a set of randomly placed particles in a homogeneous material. Assuming the smallness of the particles, we can go with the asymptotic method for solving the scattering problem. The analytical part of the solution consists in obtaining a system of linear algebraic equations (SLAE) with respect to the values of an unknown auxiliary function. The numerical solution of this SLAE makes it possible to determine the solution of the initial diffraction problem, as well as to derive an explicit formula for the magnetic permeability of the obtained inhomogeneous material. Numerical data indicate the opportunity of obtaining a more contrasting magnetic permeability distribution, compared to the regular arrangement of embedded particles.

Отримано 04.05.2024