

**УДК 537.8**

doi.org/10.15407/fmmit2024.39.056

## **Моделювання енергетичних характеристик тороїдального соленоїда**

**Богдан Каркульовський**

аспірант, Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери 12, м. Львів, 79013, Україна, bohdan.v.karkulovskiy@lpnu.ua

*Стаття спрямована на дослідження електричних характеристик соленоїдів, які є рушійними частинами мікроелектромеханічних систем (МЕМС). Наведено наближені формули для опису взаємозв'язку потужності електричного поля та механічних сил у МЕМС. Наведені аналітичні формули відкривають можливість розрахунку складових електричного поля, що дозволить визначати енергію, яка накопичується в складових частинах МЕМС. Отримані результати можуть бути використані при моделюванні та оптимізації параметрів рухомих частин МЕМС, зокрема управляючих механізмів, давачів, кантеліверів тощо.*

**Ключові слова:** ЕМ поле, рушійний пристрій, електричне поле, мікросоленоїд, властивості випромінювання, накопичена енергія, дані моделювання.

**Вступ.** МЕМС складаються з інтегрованих мікропристроїв, які забезпечують керування рухом/нерухомістю, випромінюванням/споживанням енергії. До їх складу входять оптичні мікропристрої/мікроструктури, приймальні/передавальні схеми та керуючі/інтегруючі мікросхеми. Ці конструкції дають можливість оперувати перетворенням фізичної енергії, подій і параметрів у механічні, електричні чи оптичні характеристики, а також реалізовувати зворотні процеси.

МЕМС створюються та проектуються в мікромасштабній області, з використанням мікро- та наноструктур і відповідних технологій. Це призводить до того, що в МЕМС, як приклад інтегрованої серійно продукуючої мікросистеми, можна використовувати як рухомі та нерухомі мікропристрої, джерела енергії або мікропристрої випромінювання енергії. Тому дослідження складових МЕМС, які визначають електродинамічні, механічні та енергетичні характеристики, має велике інженерно-технологічне значення.

Моделювання радіочастотних (РЧ) пристроїв МЕМС передбачає точні дані вимірювання, які стосуються малих S-параметрів вхідного сигналу, а також великих X-параметрів вихідного сигналу. Такі два взаємопов'язані ефекти викликають залучення методів моделювання. Перший тип параметрів забезпечує можливість оцінки низького сигналу та лінійної характеристики лише поблизу фіксованого вихідного параметру, на відміну від вищезазначеного, другий тип параметрів може працювати з великими сигналами та нелінійними властивостями. Його недоліком є довготривалість процесу, при умові, що не застосовуються часові обмеження [1]. Вищевказане викликає необхідність створення адекватних моделей, які б описували як статичну, так і динамічну природу рухомих частин МЕМС, які керуються, як правила, з допомогою електромагнітних (ЕМ) сигналів.

У попередні десятиліття електромеханічні характеристики рухомих і силових частин МЕМС розглядалися в статичному наближенні; при цьому не завжди враховувався динамічний характер ЕМ процесів [2] – [4].

Основними технологічними елементами МЕМС є соленоїди, які при збудженні їх електромагнітними сигналами викликають рух управляючих механізмів. Соленоїди виготовляються з високопроникних феромагнітних матеріалів і використовуються як з'єднання рухомих (плунжерних) і нерухомих (статичних) елементів МЕМС. Соленоїди такого типу перетворюють електричну енергію в механічну або навпаки. Властивості соленоїда визначаються ЕМ збудженням, його геометрією, матеріалами, магнітною проникністю матеріалу, опором статичної частини, індуктивністю котушки, тертям частин тощо [5] – [8]. Плунжер зміщується, тоді як нерухома частина залишається в статичному положенні. Якщо до обмотки соленоїда підвести електричну потужність, то в ній з'являється струм і виникає ЕМ сила, що призводить до руху плунжера. Якщо доведена потужність зменшується, то плунжер може перейти у вихідний стан за рахунок сили пружини. У цьому процесі необхідно виключити небажані ефекти, такі як тертя та залишковий магнетизм [9] – [12].

У цій роботі описано ЕМ процеси, характерні для силових приводів МЕМС різного типу. Зокрема, запропонований підхід може бути застосований для дослідження електричних характеристик різних типів соленоїдів.

## 1. Енергетичні характеристики соленоїда

Для розрахунку енергетичних характеристик пристроїв тороїдального соленоїда ми використаємо тут основи ЕМ теорії. Буде отримано формули для компонент ЕМ поля, які дають можливість оцінити енергетичні характеристики, на основі яких визначаються сили, що діють на рухомі пристрої МЕМС.

На початку розглянемо випадок електростатичного збудження. Загальна потенціальна енергія, яка отримується як результат дії електростатичного поля, визначається різницею потенціалів  $V$  і записується у вигляді

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v \rho_v V dv [J], \quad (1)$$

де  $\rho_v$  – інтенсивність поверхневого заряду (в  $C/m^3$ ,  $C$  – сігма (провідність)),  $\rho_v = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$ ,  $\vec{\nabla}$  – оператор ротору ( $rot, curl$ ),  $\vec{D}$  – вектор електричної індукції.

В загальному, потенціальна енергія  $W_e$  може визначатися як величина зусилля, необхідного для виникнення поля електростатичного заряду. Тому величина зусилля знаходиться за величиною заряду і потенціалу.

У випадку неперервного розміщення об'ємних зарядів ( $\rho_v = const$ ), заряд змінюється завдяки приросту  $\rho_v dv$ , що визначає співвідношення

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v \rho_v V dv. \quad (2)$$

Це дає змогу отримати значення енергії з використанням характеристик електричного поля (формулу Гауса):

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dv, \quad (3)$$

якщо використати співвідношення  $\rho_v = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$ ,  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ . Тому поверхнева густина струму електростатичного поля  $\epsilon \cdot 1/2 \vec{D} \cdot \vec{E}$  (вимірюється в  $J/m^3$ , J – джоуль).

Для лінійного середовища

$$W_e = \frac{1}{2} \int_v \epsilon |\vec{E}|^2 dv = \frac{1}{2} \int_v \frac{1}{\epsilon} |\vec{D}|^2 dv. \quad (4)$$

Як відомо [13], вектор електричного поля  $\vec{E}(x, y, z)$  може бути визначений за електростатичним скалярним потенціалом  $V(x, y, z)$ :

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla} V(x, y, z). \quad (5)$$

Для циліндричної і сферичної систем координат ми отримаємо

$$\vec{E}(r, \varphi, z) = -\vec{\nabla} V(r, \varphi, z), \quad (6)$$

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = -\vec{\nabla} V(r, \theta, \varphi). \quad (7)$$

В силу (3), потенціальна енергія, яка накопичується електричним полем між двома ізолюваними поверхнями, визначається формулою

$$W_e = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2, \quad (8)$$

яка, як правило застосовується для пристроїв, що містять конденсатори.

На основі використання критерію віртуальної роботи, у випадку безвтратних консервативних систем, ми приходимо до висновку, що зміна електростатичної енергії  $dW_e$  еквівалентна зміні механічної енергії  $dW_{mech}$ . Це дає співвідношення

$$dW_e = dW_{mech}. \quad (9)$$

А для зміни механічної енергії ми отримуємо співвідношення

$$dW_{mech} = \vec{F}_e \cdot d\vec{l}, \quad (10)$$

де  $d\vec{l}$  – векторний диференціал дуги.

Використовуючи (9) і (10), ми отримаємо  $dW_e = \vec{\nabla} W_e \cdot d\vec{l}$ . Тому зміна накопиченої електростатичної енергії визначає зусилля:

$$\vec{F}_e = \vec{\nabla} W_e. \quad (11)$$

Для декартових координат ми отримуємо

$$F_{ex} = \frac{\partial W_e}{\partial x}, F_{ey} = \frac{\partial W_e}{\partial y}, \text{ and } F_{ez} = \frac{\partial W_e}{\partial z}. \quad (12)$$

## 2. Використання компонент ЕМ поля для визначення енергії

Визначення енергії ЕМ поля, яка формується частинами рухомих пристроїв МЕМС, має вирішальне значення в процесі їх моделювання та проектування. Розрахунок енергії у випадку відомої власної ємності передбачає, що струми  $i$  (співвідношення  $W = 1/2Li^2$  у випадку конденсаторів) відомі. Це дає можливість отримати експериментальні дані для визначення значення  $i$ . Часто для розрахунку цього параметра застосовують наближені формули (аналогічно (4)). Для випадку тороїдального соленоїда компоненти ЕМ поля можна подати за формулами [14]

$$H_{\varphi} = \frac{\Lambda}{2r^3} [((kr)^2 - 1) \sin \Omega + kr \cos \Omega] J_1(kd \sin \theta) + \frac{\Lambda kd}{4r^3} \sin \Omega \sin \theta J_0(kd \sin \theta), \quad (13)$$

$$E_{\theta} = \frac{\Lambda k}{2r^2} \cos \Omega (J_1(kd \sin \theta) - kd \sin \theta J_2(kd \sin \theta)) - \frac{\Lambda k}{4r^3} \sin \Omega [d \sin \theta (J_0(kd \sin \theta) - 3J_2(kd \sin \theta) - 2kr^2 J_1(kd \sin \theta))], \quad (14)$$

$$E_r = -\frac{\Lambda kd \cos \theta}{2r^3} (\sin \Omega - kr \cos \Omega) J_0(kd \sin \theta) + \frac{\Lambda kd^2 \sin \theta \cos \theta}{2r^4} (3 \cos \Omega + 2kr \sin \Omega) J_1(kd \sin \theta), \quad (15)$$

де  $\Lambda = \pi R^2 g$ ,  $g = 2NI/c$ ,  $\Omega = kr - \omega t$ . Значення  $R$  відповідає точці на торі,  $N$  – кількість витків,  $I$  – значення струму на окремому витку,  $c$  – швидкість світла,  $\omega$  – кутова частота ( $\omega = 2\pi f$ ),  $r$  – відстань до точки спостереження,  $t$  – час.

У дальній зоні ці вирази мають вигляд

$$E_{\theta} = H_{\varphi} = \frac{1}{2r} \Lambda k^2 \sin \Omega J_1(kd \sin \theta), \quad (16)$$

$$E_r = \frac{1}{2r^2} \Lambda k^2 d \cos \theta \cos \Omega J_0(kd \sin \theta). \quad (17)$$

Радіальна компонента вектора Пойнтінга має вигляд

$$P_r = \frac{1}{4\pi c} E_{\theta} H_{\varphi} = \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{\Lambda k^2 \sin \Omega}{2r} \right)^2 (J_1(kd \sin \theta))^2. \quad (18)$$

Такий вигляд дозволяє обчислити її аналітично. Тому загальний потік енергії визначається за формулою

$$WF = \frac{1}{4c} \left( \frac{\Lambda k^2}{2} \right)^2 \int_0^{\pi} (J_1(kd \sin \theta))^2 \sin \theta d\theta. \quad (19)$$

Остання формула дозволяє визначити величину енергії на одному періоді. В результаті ми отримали явну формулу для потоку енергії, яка продукується соленоїдом, а явні формули (13) – (19) можна використати для постановки і розв'язання оптимізаційних задач.

### 3. Результати числового моделювання

Тут наведено числові результати залежності потоку енергії у круглому тороїдальному соленоїді. Геометрію задачі наведено на рис. 1. Параметри соленоїда вибрані наступним чином: радіус тора 0,1 м, внутрішній радіус тора 0,10 м, число витків  $N = 10$ , струм  $I$  в котушках соленоїда заданий; альтернативно його можна задавати як параметр оптимізації; Інші фізичні та геометричні параметри змінюються, що дає змогу визначити оптимальну енергію. Дані наведені для частоти 6 ГГц. Елемент об'єму в системі сферичних координат задається як  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ . Інтегрування у формулі (19) виконується чисельно.

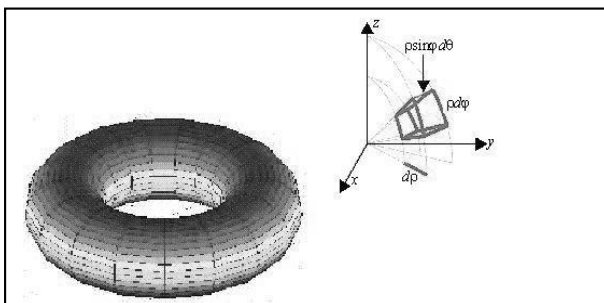


Рис. 1. До геометрії задачі.

На рис. 2 і 3 наведено амплітуди  $E_\theta$  і  $E_r$  як функції координат  $r$  і  $\theta$ , (їхні одиниці вимірювання [В/м]). Значення  $r$  змінюється в діапазоні від 0.5 м до 5.0 м. Видно, що  $E_\theta$  для всіх  $r$  і  $\theta$  змінюється повільно, і така зміна має природу, подібну до періодичної по координаті  $r$ ; залежність від координати  $\theta$  менша і  $E_\theta$  зменшується при великих  $r$ .

Амплітуда компоненти  $E_r$  суттєво залежить від  $r$ . Максимум амплітуди не більший ніж  $3 \times 10^{-5}$  при  $r > 4.5$  м. Концентрація випромінювання  $E_r$  відбувається в напрямку  $\theta = 0$ . Це може свідчити про вузьку діаграму спрямованості цієї компоненти.

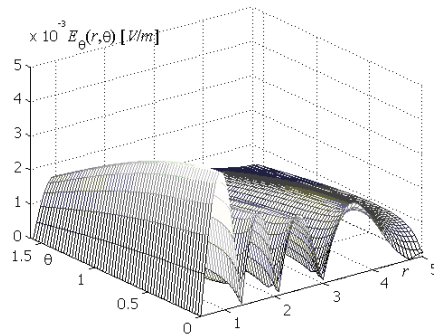


Рис. 2. Залежність  $E_{\theta}(r, \varphi)$  від радіуса  $r$  і кута  $\theta$ .

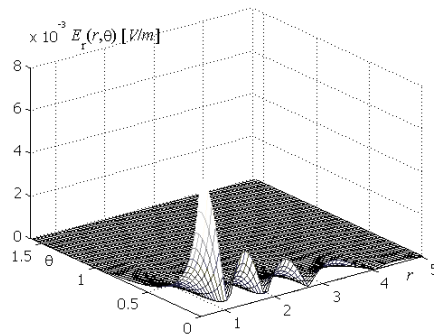


Рис. 3. Залежність  $E_r(r, \varphi)$  від радіуса  $r$  і кута  $\theta$ .

Проведено дослідження розподілу енергії при різних геометричних параметрах параметрів соленоїда. Область  $V$ , у якій розраховується енергія  $W_e$ , визначається як  $V = \{0 \leq \theta \leq \pi/2, 0.5 \leq r \leq 5.0\}$  ( $r$  вимірюється в м). Залежність енергії  $W_e$  (в джоулях) від частоти при різній кількості  $N$  витків у соленоїді показано на рис. 4. Властивість  $W_e$  при такому наборі параметрів соленоїда полягає в тому, що енергія зростає, якщо число  $N$  збільшується; одночасно вона зростає при збільшенні  $f$ . Результати демонструють резонансний характер при певних значеннях  $f$ . Наприклад, значення  $W_e$  суттєво зменшується при  $f = 5.95$  ГГц, а максимум досягається на частоті  $f = 7.93$  ГГц.

Це дозволяє визначити оптимальні значення параметрів соленоїда, що забезпечує кращі характеристики з точки зору енергоефективності. Подібні характеристики отримано при дослідженні залежності  $W_e$  від діаметра тора  $d$  (рис. 5). Енергія  $W_e$  зменшується, коли діаметр  $d$  зростає. Вищезазначене пояснюється фізичною природою соленоїда як джерела електромагнітного випромінювання: енергія розподіляється у більшому об'ємі, тому не може сконцентрувати однакову порцію випромінювання в тому самому фіксованому об'ємі.

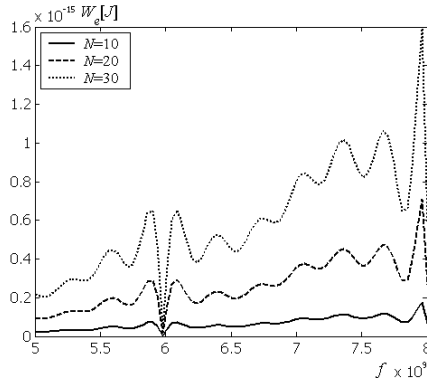


Рис. 4. Залежність енергії  $W_e$  від частоти  $f$  для різних  $N$ .

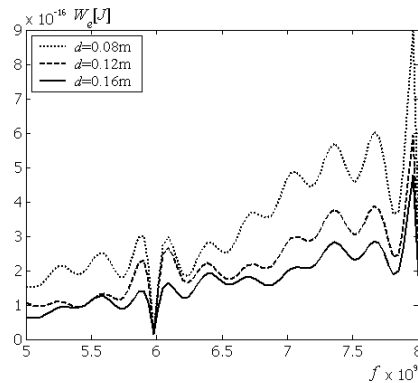


Рис. 5. Залежність енергії  $W_e$  від частоти  $f$  для різних  $d$ .

Отримані результати можуть бути застосовані для визначення механічних зусиль, які виникають при експлуатації МЕМС, що мають у своєму складі соленоїди. Можна очікувати, що пряме визначення механічних сил є пов'язане з геометрією МЕМС, але числовий підхід завдяки використанню співвідношень (4), (12) має перспективу.

## 5. Висновки

Наведено результати моделювання енергетичних властивостей тороїдального соленоїда, як складового елемента багатьох сучасних МЕМС. Числові дані, пов'язані з розрахунком компонентів ЕМ поля соленоїда, відкривають шлях до легкого розрахунку збереженої потужності. Результати можна модифікувати для випадку ЕМ полів, що призводить до доповнення формули (9) деяким додатковим членом. Отримані результати в перспективі можуть бути застосовані для моделювання кантеліверів МЕМС, включаючи визначення їхніх оптимальних параметрів. Перспективою підходу є можливість його використання для визначення зусиль, створюваних рухомими частинами МЕМС, і оцінки в подальшому характеристик їхньої надійності.

## Література

- [1] *Verspecht J., Horn J., Betts L., Gunyan D., Pollard R., Gillease C., and Root D. E.*, Extension of X-parameters to include long-term dynamic memory effects. IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig., June 2009, 741–744.
- [2] *Senturia S. D.*, Microsystem Design. Norwell, MA: Kluwer, 2001.
- [3] *Rebeiz G. M.*, RF MEMS, Theory, Design and Technology. Hoboken, NJ: Wiley, 2003.
- [4] *Ventra M. D., Pershin Y. V., and Chua L. O.*, Circuit elements with memory: Memristors, memcapacitors, and meminductors. Proc. IEEE., Vol. 97, No. 10, Oct. 2009, 1717–1724.
- [5] *Mestrom R. M. C., Fey R. H. B., and Nijmeijer H.*, Phase feedback for nonlinear MEM resonators in oscillator circuits. IEEE/ASME Trans. Mechatron., Vol. 14, No. 4, Aug. 2009, 423–433.
- [6] *Kaajakari V., Mattila T., Lipsanen A., and Oja A.*, Nonlinear mechanical effects in silicon longitudinal mode beam resonators. Elsevier Sens. Actuators A: Phys., Vol. 120, No. 1, Apr. 2004, 64–70.
- [7] *Kaajakari V., Mattila T., Oja A., Kiihamäki J., and Seppä H.*, Square-extensional mode single-crystal silicon micromechanical resonator for low-phase-noise oscillator applications. IEEE Electron Device Lett., Vol. 25, No. 4, Apr. 2004, 173–175.
- [8] *Kaajakari V., Koskinen J. K., and Mattila T.*, Phase noise in ca-pacitively coupled micromechanical oscillators. IEEE Trans. Ul-trason., Ferroelect., Freq. Contr., Vol. 52, No. 12, Dec. 2005, 2322–2331.
- [9] *Holmgren O., Kokkonen K., Veijola T., Mattila T., Kaajakari V., Oja A., Knuutila J. V., and Kaivola M.*, Analysis of vibration modes in a micromechanical square-plate resonator. J. Micromech. Microeng., Vol. 19, No. 1, Jan. 2009, 11 p.
- [10] *DeMartini B. E., Butterfield H. E., Moehlis J., and Turner K. L.*, Chaos for a microelectromechanical oscillator governed by the nonlinear Mathieu equation. J. Microelectromech. Syst., vol. 16, No. 6, Dec. 2007, 1314–1323.
- [11] *Mestrom R. M. C., Fey R. H. B., and Nijmeijer H.*, Phase feedback for nonlinear MEM resonators in oscillator circuits. IEEE/ASME Trans. Mechatron., Vol. 14, No. 4, Aug. 2009, 423–433.
- [12] *Lyshevski S. E.*, Nano- and Micro-Electromechanical Systems: Fundamentals of Nano- and Microengineering. 2nd Edition, Boca Raton, London, New York, Washington: CRS Press, 2000.
- [13] *Захарія Й. А.*, Методит прикладної електродинаміки. Львів: Бескид Біт, 2003.
- [14] *Afanasiev O. N., Dubovik V. M.*, Electromagnetic properties of toroidal solenoid. J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 25, 1992., 4869–4886. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/25/18/020>

## Modeling the energy characteristics of a toroidal solenoid

Bohdan Karkulovskiy

*The study of the energy performances of a toroidal solenoid, which is a motion part of MEMS is carried out. The close formulas are given to describe the interconnection of the electrical field power and the mechanical forces in MEMS. The given analytical formulas open the ability to calculate the stored power by the electrical field components. The obtained results open a way to model and optimize the parameters of running parts of MEMS, in particular the actuators, sensors etc.*

Отримано 04.05.2024