

Аналіз міцності безмежної матриці, послабленої одноперіодичним масивом залікованих тріщин, під крутним навантаженням

Володимир Станкевич¹, Олег Светлов², Роман Гриньків³

¹Доцент, д. ф.-м. н., кафедра механіки Львівського національного університету імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail stan_volodja@yahoo.com

²Аспірант, e-mail osvietlov@gmail.com

³Магістр, e-mail rgrinkiv030924@gmail.com

Запропоновано гранично-інтегральний підхід для дослідження напружено-деформівного стану безмежного тіла-матриці з одноперіодичним масивом залікованих податливим матеріалом тріщин та навантаженого статичними зусиллями скруту. Задача зведена до розв'язування системи двовимірних граничних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій стрибків зсувних зміщень поверхонь дефектів. За допомогою розв'язків задачі обчислені коефіцієнти інтенсивності напружень повздовжнього зсуву та проаналізовані їх залежності від розмірів заповнених ін'єкційним матеріалом областей тріщин, відстані між ними та товщини наповнювача.

Ключові слова: безмежне тіло-матриця, одноперіодичний масив залікованих тріщин, метод граничних інтегральних рівнянь, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Вступ. Відомо, що міцність реальних тіл значною мірою обумовлена наявністю в них різноманітних структурних дефектів на кшталт тріщин, порожнин, включень тощо. Особливе місце серед них займають тонкостінні пружні включення малої жорсткості. Дослідження напружено-деформівного стану тіл-матриць з такими дефектами зацікавлює стосовно аналізу їх міцності, отримання композитних структур з новими механічними властивостями, здатності витримувати навантаження різної природи в екстремальних умовах [1-3]. Практичний застосунок теорії структурних дефектів типу податливих включень спостерігається у використанні новітніх ін'єкційних технологій, суть яких полягає у повному(частковому) заповненні наявних у конструкціях тріщин спеціально розробленими полімерами та ремонтними розчинами [4-6]. Зауважено, що така технологія заліковування (склеювання) тріщин призводить до підвищення міцності пошкоджених конструкцій та подовження їх життєвого циклу [7, 8].

У розглядуваній роботі розглянуто тривимірну статичну задачу про крутне навантаження безмежного тіла з масивом одноперіодично розташованих залікованих ін'єкційним матеріалом кругових тріщин. Для дослідження використано математичний апарат методу граничних інтегральних рівнянь, який раніше використано для аналогічного об'єкту з дефектами під дією нормальних до площин їх розташування зусиль розтягу [9].

1. Формулювання задачі.

Розглядаємо безмежне тіло(матрицю), яке містить одноперіодичний масив залікованих ін'єкційним матеріалом (наповнювачем) завтовшки $2h$ паралельних тріщин радіуса a , геометричні центри яких розташовані на одній лінії (рис. 1 a) на однакових відстанях d . На безмежності тіло зазнає скруту зусиллями

$$\tau_{j3}(\mathbf{x}) = (-1)^{3-j} x_{3-j} \tau_0 / a, \quad j=1,2, \quad \tau_0 = \text{const}.$$

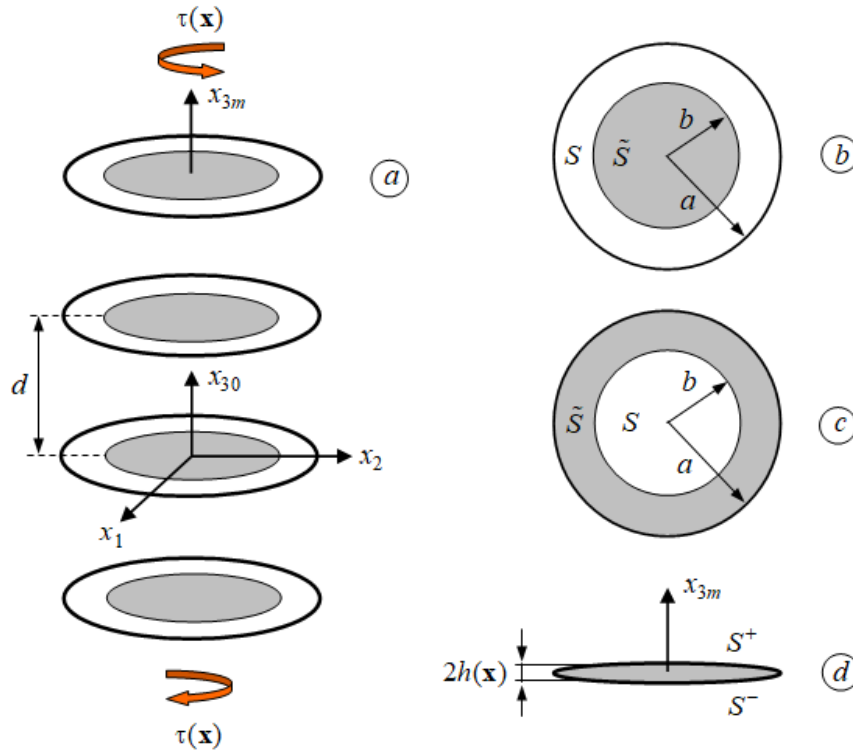


Рис. 1. Розрахункова схема задачі.

Матеріали матриці та наповнювача ідеально сконтактовані між собою і характеризуються відповідно модулями зсуву G і $G_0 \ll G$. Заповнену область розглядаємо як тонкостінне податливе включення з найбільшою товщиною $2h \ll 2a$. Розглядаємо три випадки заповнення тріщини ін'єкційним матеріалом – серединна поверхня включення займає кругову область \tilde{S} радіуса b (рис. 1 b); кільцеву область \tilde{S} (рис. 1 c); повністю заповнені тріщини ($S = \tilde{S}$ – рис. 1 d). Для розглянутого випадку розташування дефектів та навантаження матриці задача дослідження напружено-деформівного стану тіла зводиться до розв'язання диференціального рівняння відносно вектора пружних переміщень $\vec{u}(u_1, u_2, 0)$

$$\Delta_3 \vec{u} = 0, \quad (1)$$

де $\Delta_3 = \sum_{n=1}^3 \partial^2 / \partial x_n^2$ – тривимірний Лапласів оператор. Крайові умови задачі є умовами типу

Вінклера, винесеними на серединну поверхню включення, і виражають лінійну залежність дотичних напружень зсувним переміщенням [7]

$$\tau_{j3}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{G_0}{2h(\mathbf{x})} [u_j(\mathbf{x})], & j=1,2, \mathbf{x}(x_1, x_2, 0) \in \tilde{S} \\ 0, & \mathbf{x}(x_1, x_2, 0) \in S \setminus \tilde{S} \end{cases}. \quad (2)$$

Тут величина $[u_j(\mathbf{x})]$ характеризує розрив зсувних зміщень точок протилежних поверхонь S^\pm дефектів, при цьому повне переміщення згідно принципу суперпозиції описується поданням

$$u_j(\mathbf{x}) = u_j^I(\mathbf{x}) + u_j^{II}(\mathbf{x}), \quad j=1,2.$$

Складова $u_j^{I\pm}(\mathbf{x})$ характеризує зміщення в однорідному тілі на місці уявних поверхонь S^\pm від навантаження $\vec{\tau}(\tau_{13}, \tau_{23})$ на безмежності; $u_j^{II\pm}(\mathbf{x})$ – зміщення поверхонь S^\pm від прикладеного на них навантаження $-\vec{\tau}(\tau_{13}, \tau_{23})$. Тоді

$$[u_j^I(\mathbf{x})] = u_j^{I+}(\mathbf{x}) - u_j^{I-}(\mathbf{x}), \quad [u_j^{II}(\mathbf{x})] = u_j^{II+}(\mathbf{x}) - u_j^{II-}(\mathbf{x}) = -4\pi \Delta u_j(\mathbf{x}), \quad (3)$$

де $\Delta u_j(\mathbf{x}) = (u_j^{H-}(\mathbf{x}) - u_j^{H+}(\mathbf{x})) / 4\pi$, $j = 1, 2$ – невідома функція стрибка тангенційних зміщень точок поверхонь S^\pm дефекту. Напруження у тілі подаємо у вигляді

$$\tau_{j3}(\mathbf{x}) = \tau_{j3}^I(\mathbf{x}) + \tau_{j3}^{II}(\mathbf{x}), \quad \tau_{j3}^I(\mathbf{x}) = -\tau_{j3}(\mathbf{x}). \quad (4)$$

2. Гранично-інтегральне формулювання задачі.

Рівняння (1) тотожно задовільняється вибором його розв’язку у вигляді інтегрального подання

$$u_j^{II}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial H_{j0}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{30}} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial H_{jm}(\mathbf{x}_m)}{\partial x_{3m}}, \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

де

$$H_{jm}(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{\Delta u_j(\xi)}{|\mathbf{x}_m - \xi|} dS_\xi$$

– ньютонівські потенціали [9];

$$|\mathbf{x}_m - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_{3m}^2}, \quad x_{3m} = md.$$

Вирази для дотичних напружень отримуємо підстановкою (5) у співвідношення закону Гука

$$\tau_{j3}^{II}(\mathbf{x}_0) = -G \Delta_2 \left\{ H_{j0}(\mathbf{x}) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} H_{jm}(\mathbf{x}_m) \right\}, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

де $\Delta_2 = \sum_{n=1}^2 \partial^2 / \partial x_n^2$ – двовимірний Лапласів оператор. З урахуванням симетрії та періодичності задачі невідомі функції стрибків $\Delta u_{j0}(\mathbf{x}_0) = \Delta u_{jm}(\mathbf{x}_m) = \Delta u_j(\mathbf{x})$, а крайові умови (2) задачі

достатньо задовольнити на серединній поверхні лише одного (актуального) дефекту. Тоді на підставі подань (3), (4) крайові умови (2) трансформуються до вигляду

$$\begin{aligned} & -2\pi \frac{G_0}{G} \frac{\Delta u_j(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \Delta_2 \iint_S \frac{\Delta u_j(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} dS_\xi + 2\Delta_2 \sum_{m=1}^{\infty} \iint_S \frac{\Delta u_j(\xi)}{|\mathbf{x}_m - \xi|} dS_\xi = \\ & = -\frac{1}{G} \begin{Bmatrix} \tau_{j3}(\mathbf{x}) + \frac{G_0}{2h(\mathbf{x})} [u_j^I(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x}(x_1, x_2) \in \tilde{S} \\ \tau_{j3}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(x_1, x_2) \in S \setminus \tilde{S} \end{Bmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (7) \end{aligned}$$

Отримані інтегральні рівняння є системою 2-х незв’язаних двовимірних граничних інтегральних рівнянь (ГІР) другого роду типу Ньютонівського потенціалу для визначення невідомої функції Δu_j . Для подальшого обчислення суми ряду потрібно скористатися інтегральним представленням [10]

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_m - \xi| &= \int_0^{\infty} J_0(\zeta |\mathbf{x} - \xi|) \exp(-x_{3m} y) dy = \int_0^{\infty} J_0(\zeta |\mathbf{x} - \xi|) \exp(-md y) dy, \\ |\mathbf{x} - \xi| &= \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} \end{aligned}$$

та виразом суми геометричної прогресії

$$\Omega(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-md y) = \frac{\exp(-d y)}{1 - \exp(-d y)},$$

де $J_0(z)$ – функція Бесселя першого роду 0-го порядку дійсного аргументу z . Тоді з урахуванням тотожності $\Delta_2 J_0(y|\mathbf{x} - \xi|) = -y^2 J_0(y|\mathbf{x} - \xi|)$ система ГІР (7) задачі набуває вигляду

$$-2\pi \frac{G_0}{G} \frac{\Delta u_j(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \Delta_2 \iint_S \frac{\Delta u_j(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} dS_\xi - 2 \iint_S \Delta u_j(\xi) \int_0^{\infty} y^2 J_0(y|\mathbf{x} - \xi|) \Omega(y) dy dS_\xi =$$

$$= -\frac{1}{G} \left\{ \begin{array}{l} \tau_{j3}(\mathbf{x}) + \frac{G_0}{2h(\mathbf{x})} [u_j^I(\mathbf{x})], \mathbf{x}(x_1, x_2) \in \tilde{S} \\ \tau_{j3}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(x_1, x_2) \in S \setminus \tilde{S} \end{array} \right\}, j=1,2. \quad (8)$$

Зазначимо, що перші два доданки лівої частини ГІР описують випадок поодинокого включення у безмежному тілі; третій доданок є модифікованою функцією Гріна, яка враховує вплив решти періодично розташованих дефектів.

3. Числове розв'язування ГІР.

Для подальшого розв'язування ГІР використовуємо подання для функцій $\Delta u_j(\mathbf{x})$ та параметру $h(\mathbf{x})$ товщини дефекту [9]

$$\Delta u_j(\mathbf{x}) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \gamma_j(\mathbf{x}), j=1,2, \quad h(\mathbf{x}) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} h/a, \quad (9)$$

де $\gamma_j(\mathbf{x})$ – двічі диференційовні за змінними x_1, x_2 невідомі функції. Представлення (9) забезпечує перетворення в нуль згаданих функцій на контурі області S за рахунок природнього змикання на ньому протилежних поверхонь дефекту. Виконавши операції диференціювання

$$\Delta_2 \iint_S \frac{\Delta u_j(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} dS_\xi = \iint_S \frac{\Delta u_j(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|^3} dS_\xi$$

та врахувавши (9), система ГІР (8) набуває остаточного вигляду

$$\begin{aligned} & -2\pi \frac{G_0}{G} \frac{\gamma_j(\mathbf{x})}{h/a} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \gamma_j(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|^3} dS_\xi - \\ & -2 \iint_S \sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \gamma_j(\xi) \int_0^\infty y^2 J_0(y|\mathbf{x} - \xi|) \Omega(y) dy dS_\xi = \\ & = -\frac{1}{G} \left\{ \begin{array}{l} \tau_{j3}(\mathbf{x}) + \frac{G_0}{2h(\mathbf{x})} [u_j^I(\mathbf{x})], \mathbf{x}(x_1, x_2) \in \tilde{S} \\ \tau_{j3}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(x_1, x_2) \in S \setminus \tilde{S} \end{array} \right\}, j=1,2. \end{aligned} \quad (10)$$

Ядро другого доданку містить гіперсингулярність виду $|\mathbf{x} - \xi|^{-3}$ в точці $\mathbf{x}(x_1, x_2) = \xi(\xi_1, \xi_2)$. Подальша регуляризація ГІР описана в [11]. При цьому кругову область S в полярній системі координат покривали чотирикутними граничними елементами зі сталими в їх межах дискретними значеннями функцій γ_j . Кроки розбиття за радіальною і кутовою координатами становили відповідно $\Delta r = 0,01a$ і $\Delta \varphi = \pi/12$. Для обчислення півбезмежного інтегралу задіяли Лагеррові квадратури. Задоволенням ГІР (10) в точках колокацій граничних елементів поставлену задачу зводили до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих дискретних значень функцій γ_j . За допомогою значень $\gamma_j(a, \varphi)$ в точках контуру області S дефекту визначали коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) повздовжнього зсуву

$$K_{III}^{вкл}(\varphi) = -2G\pi\sqrt{\pi a} [\gamma_1(a, \varphi) \sin \varphi - \gamma_2(a, \varphi) \cos \varphi].$$

4. Аналіз результатів.

Розглядали випадок товщини включення $h/a \leq 0,02$ та параметром $\tilde{G} = G_0/G \leq 0,2$ контрастності жорсткостей матеріалів, що з достатньою для обрахунків точністю дозволяє знехтувати впливом доданку $[u_j^I(\mathbf{x})]$ у правій частині ГІР (10). На рис. 2 наведені залежності

нормованих КІН $\tilde{K}_{III} = K_{III}^{вкл} / K_{III}^{тріщ}$ ($K_{III}^{тріщ} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \tau_0$ – статичний КІН повздовжнього зсуву

для поодинокі тріщини у безмежному тілі під аналогічними зусиллями скруту [12]) повністю заповнених ін'єкційним матеріалом тріщин (включень) від параметру d/a відстані між

дефектами (при сталому значенні $h/a=0,02$ – рис. 2a), параметру h/a товщини включення (при сталому значенні $d/a=0,5$ – рис. 2b) та значення параметра \tilde{G} . Маркована крива відповідає випадку одноперіодичного масиву тріщин у тілі ($\tilde{G} = 0$).

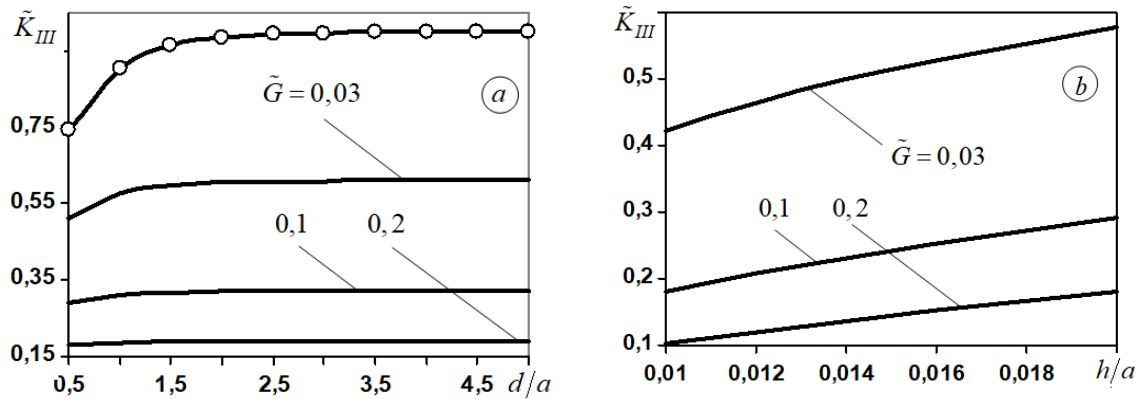


Рис. 2. Залежності нормованих КІН \tilde{K}_{III} повздовжнього зсуву від відстані між включеннями, їх товщини та контрастності жорсткостей матеріалів включень і матриці: а – $h/a=0,02$; б – $d/a=0,5$.

Аналіз наведених графіків вказує на монотонне зростання значень КІН і прямування їх до своїх аналогів для безмежного тіла з поодиноким включенням зі збільшенням відстані між дефектами. При цьому вказані графіки мажоровані зверху своїми аналогами для безмежного тіла з одноперіодичним масивом тріщин (маркована лінія на рис. 2a). Зростання значень КІН спостерігається для відстаней $d/a \leq 2,0$. Збільшення товщини включення супроводжується зростанням значень \tilde{K}_{III} (рис. 2b), що пояснюється появою додаткового навантаження (розпирання) у вершині дефекту. В цілому зниження контрастності матеріалів наповнювача і матриці (збільшення параметру \tilde{G}) призводить до зменшення значень КІН, цей феномен також раніше зауважено в роботах [7-9].

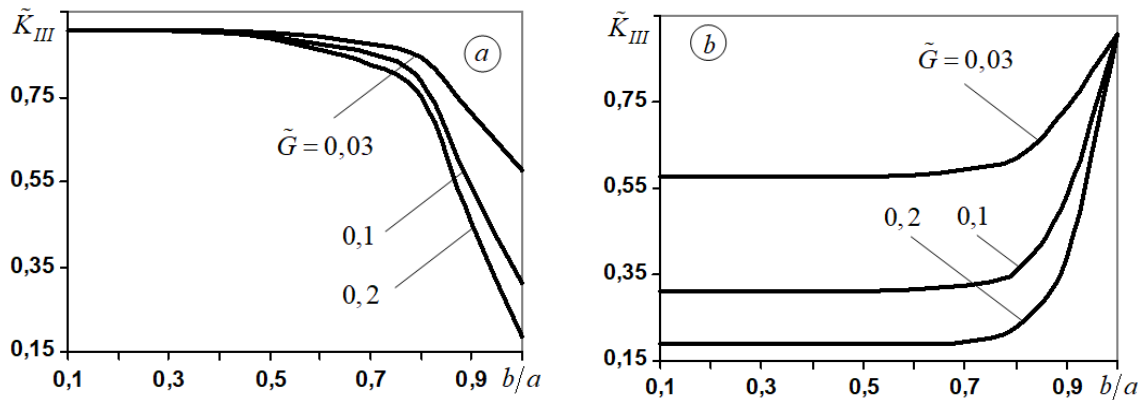


Рис. 3. Залежності нормованих КІН \tilde{K}_{III} повздовжнього зсуву від параметрів b/a заповнення тріщин та \tilde{G} контрастності жорсткостей матеріалів наповнювача і матриці ($h/a=0,02$, $d/a=1,0$): а – кругова область наповнювача на рис. 1b; б – кільцева область наповнювача на рис. 1c.

Графіки на рис. 3 ілюструють залежності КІН \tilde{K}_{III} від параметрів b/a заповнення тріщини ін'єкційним матеріалом та \tilde{G} контрастності матеріалів за фіксованих значень $d/a=1,0$ і $h/a=0,02$. Рис. 3a описує випадок кругової області наповнювача (рис. 1b), рис. 3b – кільцевої області наповнювача (рис. 1c). Спостережено ефект зміцнення тіла (зменшення значень \tilde{K}_{III}) зі збільшенням жорсткості матеріалу наповнювача та розмірів області, яку він займає. Зазначене явище більш виразне при $b/a > 0,5$ (рис. 3a) та $b/a > 0,7$ (рис. 3b). При цьому

найбільші/найменші значення КІН \tilde{K}_{III} описують випадки незаповнених/повністю заповнених тріщин. Аналогічний феномен раніше зауважено в [7-9].

Висновки. Проведено гранично-інтегральне моделювання задачі про дослідження напружено-деформівного стану безмежної матриці, навантаженої крутними зусиллями та послабленої одноперіодичним масивом залікованих ін'єкційним матеріалом кругових тріщин. Отримано систему двовимірних незв'язаних ГР другого роду з невідомими густинами, які характеризують стрибок зсувних зміщень протилежних поверхонь дефектів. Спостережено ефект зміцнення тіла шляхом збільшення області заповнення тріщин ін'єктованим матеріалом, зменшення товщини наповнювача та підвищення його жорсткості.

Література

1. Стадник М.М. Термопружний стан та міцність тіл з тонкими включеннями довільної жорсткості. – Львів: Вид-во НЛТУ України; "Дослідно-видавничий центр Наукового товариства ім. Т.Г. Шевченка". – 2015. – 316 с.
2. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. – 2007. – 716 с.
3. Pasternak I.M., Sulym H.T., Ilchuk N.I. Interaction of physicommechanical fields in bodies with thin structural inhomogeneities: A survey // Journal of Mathematical Sciences, 2021. – 253 (1). – P. 63-83.
4. Молодід О.С., Плохута Р.О. Експериментальні дослідження технології склеювання тріщин залізобетонних конструкцій просочуванням // Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві, 2018. – 25, № 2. – С. 45-50.
5. Molodid O., Plokhuta R. Research of the influence of technological factors on the quality indicators of repaired cracks in reinforced concrete slabs by soaking // East European Science Journal. Warsaw, 2019. – No. 7(47). – P. 59–66.
6. Panasyuk V.V., Marukha V.I., Sylovanyuk V.P. Efficient injection materials and the technologies of restoration of the serviceability of damaged building structures intended for long-term operation // Materials Science, 2018. – 54, № 2. – С. 154-162.
7. Panasyuk V.V., Marukha V.I., Sylovanyuk V.P. Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures. – Springer. Berlin. – 2014. – 241 p.
8. Shats'kyi I.P. Limiting equilibrium of a plate with partially healed crack // Materials Science, 2015. – 51 (3). – P. 322-330.
9. Stankevych V., Svetlov O., Aheienkov M. Boundary-integral analysis of a 3-d problem for a body with a periodic array of flexible inclusions // Physico-mathematical modeling and informational technologies, 2022. – № 34-35. – С. 84-90.
10. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. – AP Academic Press. – 2007. – 1221 p.
11. Mykhas'kiv V.V., Stankevych V.Z. Elastodynamic problem for a layered composite with penny-shaped crack under harmonic torsion // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2019. – 99(5). – P. 1-
12. Kassir M.K., Sih G.C. Three-dimensional crack problems. – Leyden: Noordhoff Int. Publ. – 1975. – 506 p.

Analysis of the strength of an infinite matrix with a single-periodic array of healed cracks under torsion load

Volodymyr Stankevych, Oleg Svetlov, Roman Grinkiv

A boundary-integral approach for the study of the stress-strain state of an infinite body-matrix with single-periodic array of cracks healed by a ductile material and under static torsion loaded is proposed. The problem is reduced to solving a system of 2-d boundary integral equation with respect to an unknown jump functions of shear displacements of defect surfaces. Using the solutions of the problem, the stress intensity factors mode III are determined and their dependence on the sizes of the areas of cracks filled with injection material, the distance between them and the thickness of the filler are analyzed.

Отримано 02.03.24.