УДК 532.595
doi.org/10.15407/fmmit2024.39.017

Особливості прояву нелінійностей кутових коливань резервуара з рідиною. Перехідний режим руху

Олег Лимарченко[1], Микола Лавренюк[2],Катерина Семенович[3]
[1]Проф., д.т.н., Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Україна, Київ, проспект академіка Глушкова, 4-е, e-mail: olelim@knu.ua
[2]Доц., к.ф.-м.н., Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Україна, Київ, проспект академіка Глушкова, 4-е, e-mail: m.lavrenyuk@knu.ua
[3]К.ф.-м.н., Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Україна, Київ, проспект академіка Глушкова, 4-е, e-mail: kateryna.semenovych@knu.ua

Вивчається задача про перехідні режими руху циліндричного резервуара з рідиною з вільною поверхнею на маятниковому підвісі під дією короткотривалого моментного імпульсу, прикладеного до стінок резервуара. Задача розглядається в нелінійній сумісній постановці. Встановлено, що прояв внутрішніх механізмів нелінійної взаємодії між формами коливань вільної поверхні рідини суттєво відрізняється від випадку гармонічного моментного збудження на резонансній частоті. Для поглибленого вивчення природи цих відмінностей досліджено задачі про гармонічне збудження коливань при дії на систему моменту з частотою, яка не є резонансною і безпосередньо резонансне збудження коливань. Проведений аналіз показав специфіку формування нелінійних процесів взаємодії між формами коливань вільної поверхні, яка з різних причин відсутня для задач збудження коливань на нерезонансних частотах і при імпульсному збудженні руху. Показано, зокрема, що в цьому випадку відомий ефект перевершення висоти горба хвилі над глибиною впадини проявляється значно слабкіше ніж у резонансному режимі і у випадку поступального руху резервуара. Одержані результати частково розкривають внутрішні механізми розвинення нелінійних ефектів збудження коливань різних форм і енергообмін між ними.

Ключові слова: ідеальна рідина, вільна поверхня, резервуар на маятниковому підвісі, сумісний рух, аналіз нелінійних ефектів хвилеутворення

Вступ. Головна увага дослідників задач динаміки конструкцій з рідиною з вільною поверхнею зосереджена на задачах, коли рух конструкції-носія є поступальним і відбувається за наперед відомим законом. При заданому русі конструкції-носія розподіл частот системи при моделюванні її руху на основі багатомодової моделі є незмінним і збігається з випадком нерухомої конструкції. В той же час відомо [3], що в значній мірі прояв нелінійних властивостей залежить від співвідношення між частотами і саме у випадку сумісного руху конструкції-носія і рідини з вільною поверхнею відбувається зміна значень частот в залежності від співвідношення між масами конструкції і рідини, типами рухів, що здійснюються, формами закріплення конструкції[1-3]. Особливо складні зміни частот спостерігаються у випадку кутових рухів конструкції-носія. Зокрема, це проявляється не лише у кількісній зміні частот, що відповідають конкретним формам руху складових системи або вільної поверхні рідини, а й у можливій зміні їх взаємного розташування при їх розподілі в порядку зростання [1,3]. Це призводить до перегляду пріоритетності прояву різних типів резонансів і виникненню так званих вторинних резонансів, які на лінійному рівні не проявляються взагалі, а також до збудження відносно великої кількості форм

коливань, які беруть участь у формуванні динамічних процесів. В свою чергу, враховуючи, що для різних типів руху співвідношення між частотами не є постійним, при врахуванні фактору сумісності складових системи, ці співвідношення переважно є трансцендентними, що в підсумку призводить до відсутності усталених режимів руху системи рідина з вільною поверхнею – конструкція [2, 4].

Варто зазначити, що переважна кількість практичних задач динаміки конструкцій з рідиною пов'язана не з поступальним, а з кутовим рухом конструкції-носія. Саме кутові рухи є основними в задачах керування аерокосмічними системами, поведінці морського транспорту на хвилях, руху наземних транспортних засобів на криволінійних ділянках і при зміні швидкості руху системи.

Виконані раніше дослідження задач динаміки конструкцій з рідиною з вільною поверхнею в рамках нелінійних моделей сумісного руху компонент системи свідчать про існування більш складних режимів руху ніж у випадку поступального руху конструкції-носія[1-3].

Виходячи з цього ставиться задача на основі розвинених математичних моделей, орієнтованих на дослідження нелінійних задач динаміки сумісного руху рідини в резервуарах циліндричної форми при кутових рухах конструкції-носія дослідити характер прояву нелінійних механізмів у формуванні динамічних процесів хвилеутворення на вільній поверхні рідини при перехідних режимах руху і привести порівняння цих ефектів з випадками гармонічного збудження руху на резонансній і білярезонансній частотах.

1. Формулювання задачі.

Розглядається задача про поведінку рідини з вільною поверхнею і конструкції-носія на маятниковому підвісі. Точка підвісу вважається нерухомою, тоді при розміщенні початку системи відліку в точці підвісу поступальний рух буде відсутній, а рух конструкції-носія повністю характеризується трьома кутами. Для моделювання руху рідини в циліндричному резервуарі колового поперечного перерізу для випадку, коли резервуар виконує малі кутові рухи, скористаємося методом, розробленим в роботі [2]. З варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського з попереднім аналітичним виключенням всіх кінематичних граничних умов задачі з точністю до величин третього порядку малості відносно амплітуд збудження форм коливань вільної поверхні (це дозволяє надалі розглядати механічну систему конструкція – рідина як вільну) одержується наступна нелінійна динамічна модель системи (система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку) відносно амплітудних параметрів збудження форм коливань вільної поверхні рідини a_i і параметрів кутового руху конструкціїα_i.

$$\sum_i \ddot{a}_i \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A^3_{rij} + \sum_{j,k} a_j a_k A^4_{rijk} \right\} = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C^3_{ijr} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C^4_{ijkr} -$$

$$-\frac{1}{2\alpha_r^{\nu}} \sum_{s=1}^{3} \ddot{\alpha}_s \left\{ \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left[E^{1*}_{pr} + \sum_i a_i E^{2*}_{pri} + \sum_{i,j} a_i a_j E^{3*}_{prij} \right] \right\} +$$

$$+\frac{1}{2\alpha_r^v}\sum_{p=1}^{3}\omega_p\left[\sum_i \dot a_i\left(E^{2*}_{pir}-E^{2*}_{pri}\right)+\sum_{i,j}\dot a_i a_j\left(E^{3*}_{pijr}+E^{3*}_{pirj}-E^{3*}_{prij}+E^{3*}_{prji}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2\alpha_r^v}\sum_{p,s=1}^{3}\omega_p\omega_s\left[E^{2}_{psr}+\sum_i a_i\left(E^{3}_{psir}+E^{3}_{psri}\right)\right]+\frac{1}{2\alpha_r^v}\sum_{p=1}^{3}\omega_p^{(k)}\left[E^{1*}_{pr}+\sum_i a_i E^{2*}_{pri}+\sum_{i,j}a_i a_j E^{3*}_{prij}\right]+$$

$$+\sum_{i,j}a_i a_j\left(\vec F^{4}_{pijr}+\vec F^{4}_{pirj}+\vec F^{4}_{prij}\right)\Bigg]+g\frac{N_r}{\alpha_r^v}\cos\alpha_1\cos\alpha_2 a_r+\ g\frac{\alpha_r^c}{\alpha_r^v}\left(\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3-\right.$$

$$\left.-\sin\alpha_1\sin\alpha_3\right)+g\frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v}\left(\sin\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\right).\qquad (r=1,2,\cdots,N)(1)$$

$$\sum_i \ddot a_i\left\{\sum_{p=1}^{3}\frac{\partial\omega_p}{\partial\dot\alpha_r}\left(E^{1*}_{pi}+\sum_j a_j E^{2*}_{pij}+\sum_{j,k}a_j a_k E^{3*}_{pijk}\right)\right\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{3}\ddot\alpha_n\left[2\sum_{p,s=1}^{3}\frac{\partial\omega_p}{\partial\dot\alpha_r}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot\alpha_n}\left(\frac{1}{\rho}J^{ps}_{res}+A^2_{ps}+\sum_i a_i E^2_{psi}+\sum_{i,j}a_i a_j E^3_{psij}\right)\right]=$$

$$=2\sum_{p,s=1}^{3}\left(\omega^*_{p,r}\omega_s+\omega_p^{(k)}\frac{\partial\omega_p}{\partial\dot\alpha_r}\right)\left(\frac{1}{\rho}J^{ps}_{res}+A^2_{ps}+\sum_i a_i E^2_{psi}+\sum_{i,j}a_i a_j E^3_{psij}\right)+$$

$$+\sum_{p=1}^{3}\omega^*_{p,r}\left(\sum_i \dot a_i E^{1*}_{pi}+\sum_{i,j}\dot a_i a_j E^{2*}_{pij}+\sum_{i,j}\dot a_i a_j a_k E^{3*}_{pijk}\right)+$$

$$+2\sum_{p,s=1}^{3}\frac{\partial\omega_p}{\partial\dot\alpha_r}\omega_s\left(\sum_i \dot a_i E^2_{psi}+2\sum_{i,j}\dot a_i a_j E^3_{psij}\right)+\sum_{p=1}^{3}\frac{\partial\omega_p}{\partial\dot\alpha_r}\left(\sum_i \dot a_i\dot a_j E^{2*}_{pij}+2\sum_{i,j}\dot a_i\dot a_j a_k E^{3*}_{pijk}\right)+$$

$$+\frac{2g}{\rho}\left(M_T h_T+M_F h_F\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_r}\left(\cos\alpha_1\cos\alpha_2\right)+$$

$$+2g\frac{\partial}{\partial\alpha_r}\Bigg[\left(\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3-\sin\alpha_1\sin\alpha_3\right)\left(\sum_i a_i\alpha_i^c+Hl^c\right)+$$

$$+\left(\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3+\sin\alpha_1\cos\alpha_3\right)\left(\sum_i a_i\alpha_i^s+Hl^s\right)\Bigg]+\frac{2}{\rho}M^r_{ex}.\qquad (2)$$

Тут ρ – густина рідини, g – прискорення вільного падіння, H – рівень рідини в резервуарі, M_T та M_F – маса резервуару та рідини, h_T та h_F – зміщення центрів мас резервуару та рідини відносно площини незбуреної вільної поверхні рідини S_0, σ – коефіцієнт сил поверхневого натягу на вільній поверхні рідини, $\vec F$ та $\vec M$ – головний вектор та головний момент зовнішніх сил відносно точки O, які діють на резервуар, $\vec\chi=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ – умовне представлення кутів повороту резервуару відносно умовно нерухомої системи координат (в рівняннях руху для опису кутового руху конструкції прийнято так звані літакові кути).

В системі рівнянь руху (1)–(2) в параметрах a_i, α_i величини a_i та α_i отримано з точністю до величин третього порядку малості включно. Система (1) складається з N

рівнянь другого порядку, де N – кількість прийнятих до розгляду форм коливань рідини, і разом із системою (2), розмірність якої залежить від способу закріплення конструкції, описує нелінійну динаміку сумісного руху конструкції з рідиною з вільною поверхнею при кутових рухах конструкції-носія. В рівняння руху входять індексні вирази, які характеризують інерційні та статичні характеристики конструкції, в'язі в системі, зовнішні моменти, які діють на конструкцію. При цьому всі ці коефіцієнти обчислюються в квадратурах від форм коливань вільної поверхні рідини ψ_i та потенціалів Стокса-Жуковського [2] і їх вирази через громіздкість тут не приводяться.

2. Аналіз прояву нелінійних механізмів хвилеутворення

Для аналізу закономірностей формування нелінійних механізмів хвилеутворення розглянемо випадок руху циліндричного резервуару на маятниковому підвісі, маса якого $M_T = 0{,}1M_F$, рівень заповнення рідиною (водою) $H = 2$ м, радіус циліндра $R = 1$м, а його висота $H_{cyl} = 2.5R$. Розглядалося два варіанта довжин підвісу $L = R$ (варіант, коли відбувається суттєве зміщення першої резонансної частоти, яке супроводжується зміною черговості розташування частот у порівнянні з випадком нерухомого резервуара [3]) і $L = 8R$ (варіант наближений до випадку розміщення частот подібно поступальному руху). Аналізувалися випадки моделювання кутового відхилення резервуара, збудження першої антисиметричної форми за нелінійним законом, збудження першої осесиметричної (m=0) форми коливань і форми коливань з коловим номером 2 (m=2), які відбуваються лише в рамках нелінійного моделювання. У випадку короткої довжини підвісу $L = R$ розглядалося збудження коливань резервуара імпульсом моменту амплітуди 1200 тривалості 1 с. Для довжини підвісу $L = 8R$ приймалася амплітуда імпульсу моменті 10000 з такою ж тривалістю. При цьому в обох випадках амплітуда обиралася так, щоб максимальні коливання на вільній поверхні рідини відбувалися у околі значень $\xi = 0.3\,R$. В початковий момент приймалося, що рідина знаходиться у стані спокою.

На рис. 1 наведено результати нелінійного моделювання для кута відхилення підвісу (*а*) і амплітуди збудження першої антисиметричної форми a_1 (*б*). На рис. 2 показано зміну в часі амплітуд коливань за формами з коловими номерами m=0 (a_3) і m=2 (a_5), які збуджуються лише в рамках нелінійної моделі. При лінійному моделюванні збуджуються лише антисиметричні форми (m=1), проте вищі амплітуди збудження для m=1 не перевершують 0,01 і тут графічно не приводяться. Аналогічні рисунки для випадку довгого підвісу приведені на рис. 3 і 4.

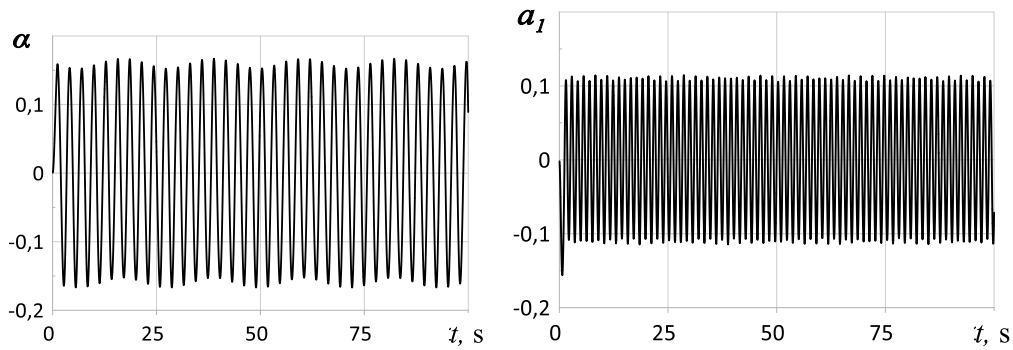


Рис. 1. Зміна в часі амплітуд кутових коливань (*а*) і за формою коливань з коловим номером *m*=1 (*б*)

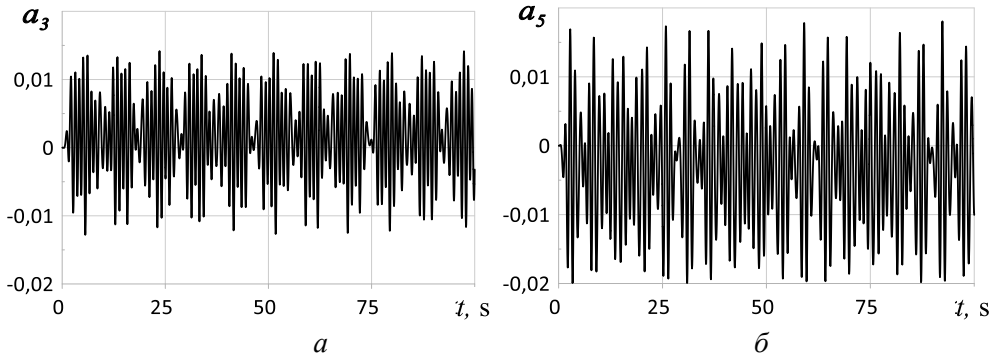
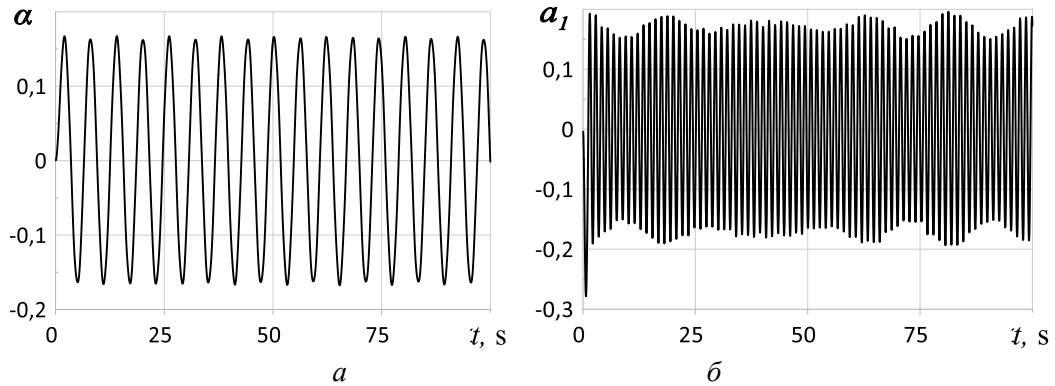


Рис. 2. Зміна в часі амплітуд коливань за першою осесиметричною (*m*=0) формою (*а*) і формою коливань з коловим номером *m*=2 (*б*)

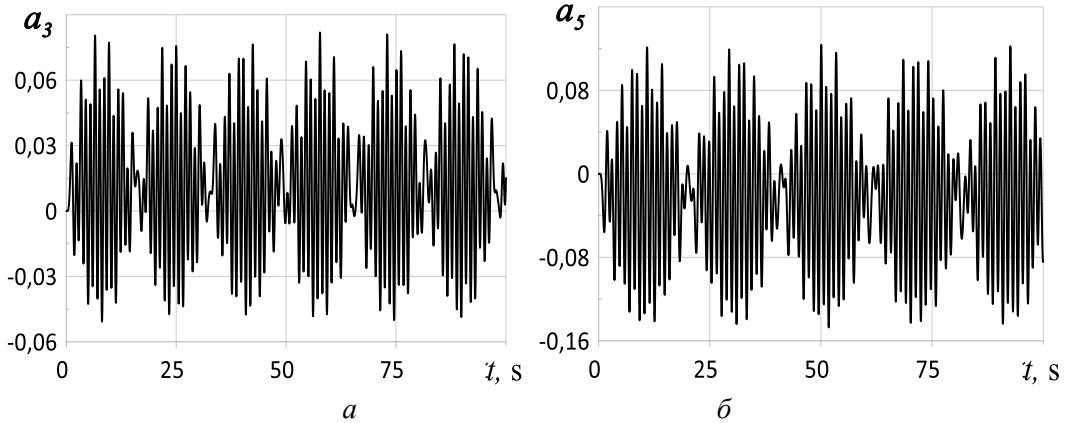
Як свідчать результати чисельного моделювання, прояв нелінійностей на кутові коливання резервуару і на коливання за першою антисиметричною формою якісно є незначним. В той же час коливання вільної поверхні рідини за формами коливань коловими номерами 0 і 2 зазнали значних якісних і кількісних змін. Аналіз рівнянь руху свідчить, що ці форми збуджуються через входження до рівнянь квадратичних членів від антисиметричної форми a_1. Відомо, що такий тип нелінійностей зветься радіаційним і відрізняється несиметричним законом зміни параметрів відносно нульового рівня. Проте такий механізм у випадку імпульсного збудження руху системи практично не проявляється. що помітно з рис. 2 *а* і *б*, 4 *а* і *б*. Це викликано насамперед через те, що дія імпульсного моменту є короткотривалою, і відповідний нелінійний механізм розвинення коливань не встиг розвинутися, а на етапі руху за інерцією (момент припинив дію) такий механізм не одержує подальшого розвитку. В задачі про перехідний режим руху розвинення коливань для форм a_3 і a_5 суттєво відрізняється від випадку резонансного збудження руху. Для аналізу причин такої відмінності розглянемо три випадки руху системи із гармонічним збудженням для короткої довжини підвісу. Варіант 1 – гармонічне збудження на частоті в малому околі резонансної $\omega = 2.3\ \mathrm{s}^{-1}$; $M_x = 2290\cos(\omega t)$. Варіант 2 – гармонічне збудження

на частоті меншій за резонансну $\omega = 1.0\ \text{s}^{-1}$; $M_x = 1000\cos(\omega t)$. Варіант 3 – гармонічне збудження на частоті більшій за резонансну $\omega = 3.0\ \text{s}^{-1}$; $M_x = 1000\cos(\omega t)$. Додаємо ще для подальшого аналізу Варіант 4 – описаний вище режим перехідного процесу.



а *б*

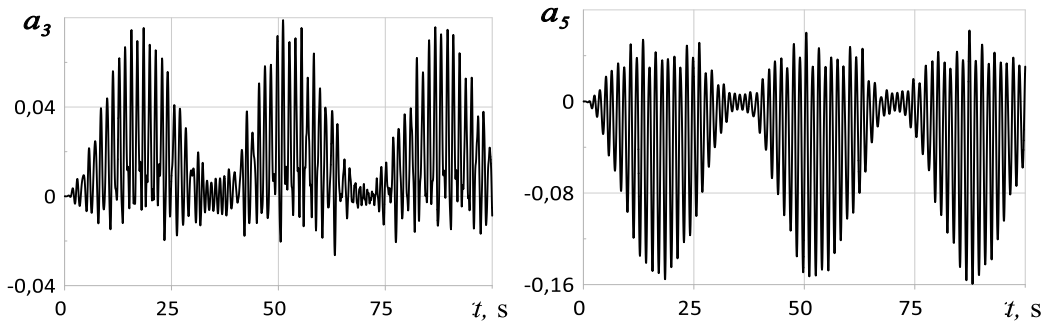
Рис. 3. Зміна в часі амплітуд кутових коливань (*а*) і за формою коливань з коловим номером *m*=1 (*б*)



а *б*

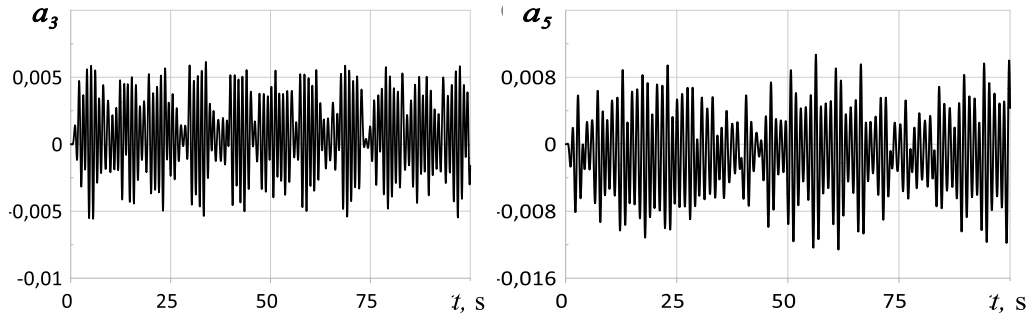
Рис. 4. Зміна в часі амплітуд коливань за першою осесиметричною (*m*=0) формою (*а*) і формою коливань з коловим номером *m*=2 (*б*)

Для порівняння приведемо закони зміни в часі амплітуд коливань зі формами a_3 і a_5 для варіантів 1– 3 (відповідно рис. 5, 6, 7). Звертаємо увагу, що кутові коливання і коливання за першою антисиметричною формою a_1 у випадку нерезонансного гармонічного збудження коливань носять мало ознак впливу нелінійних процесів.



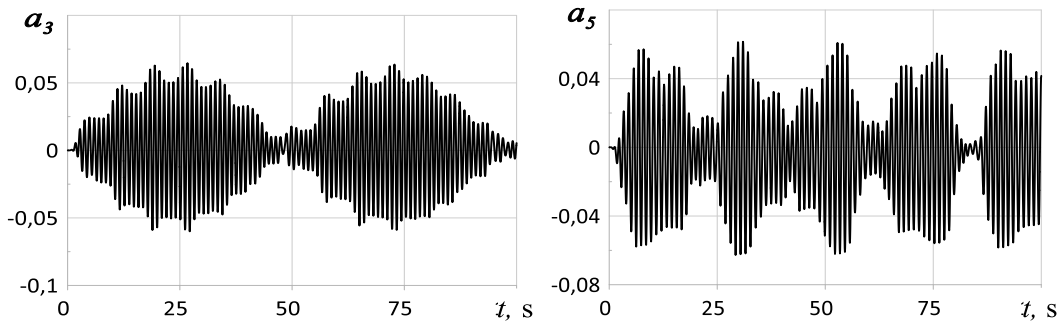
а *б*

Рис. 5. Зміна в часі амплітуд коливань за першою осесиметричною (m=0) формою (*а*) і формою коливань з коловим номером m=2 (*б*) для варіанту 1.



а *б*

Рис. 6. Зміна в часі амплітуд коливань за першою осесиметричною (m=0) формою (*а*) і формою коливань з коловим номером m=2 (*б*) для варіанту 2.



а *б*

Рис. 7. Зміна в часі амплітуд коливань за першою осесиметричною (m=0) формою (*а*) і формою коливань з коловим номером m=2 (*б*) для варіанту 3.

З аналізу рисунків видно, що загальна тенденція поведінки зміни збуджень за формами a_3 і a_5 у варіанті 1 (резонансний випадок) суттєво відрізняється від варіантів нерезонансного гармонічного збудження і перехідного процесу. Так для варіантів 2– 3 зміни збуджень за формами a_3 і a_5 мають середні значення близькі до нуля, в той час як у резонансному випадку середні значення a_3 і a_5 вагомо зміщені. Такого роду зміщення зазвичай трапляються через наявність квадратичних членів у

оновлюючій силі в рівняннях коливань. Саме такі члени, які включають a_1^2 входять до відповідних рівнянь. Звернемо увагу також на те, що на стінках форми a_3 і a_5 фактично гасять одна одну. Проте в центрі резервуара $a_3 \neq 0$ а $a_5 = 0$, що надалі обумовлює несиметричність профілю хвиль на вільній поверхні рідини. Амплітуди збудження форми a_3 вказують, що ефект несиметричності профілів хвиль на вільній поверхні рідини для кутових коливань резервуара проявляється в меншій мірі ніж у випадку чисто поступального руху.

Для аналізу природи внутрішніх нелінійних механізмів розглянемо частоти зміни форм коливань a_1, a_3, a_5 і кута нахилу підвісу αдля перших трьох варіантів збудження коливань (Таблиця 1).

Таблиця 1

Варіант	Частоти коливань для			
	a_1	a_3	a_5	α
1 – резонансний	5.5292	5.5292	4.5239	0.5*4.5239
2 – дорезонансний	4.5239	6.0319	5.5292	2.1363
3 – зарезонансний	4.5239	6.0319	5.2779	0.5*6.0319
4 – імпульсний	4.5239	6.0319	5.2779	2.1363

Звертає на себе увагу, що в резонансному випадку частоти для a_1 і a_3 збігаються, а для a_5 відбуваються коливання на подвоєній частоті кутових коливань α. Надалі така частотна залежність проявляється лише у випадку за резонансних коливань, проте в цьому випадку вагомого розвитку цей механізм не знайшов. Отже, в усіх цих прикладах мають прояви внутрішні нелінійні резонанси. Саме через них збуджуються коливання за формами a_3, a_5, які в лінійному випадку взагалі не збуджуються. Окремим випадком є резонансний, коли відразу збуджується декілька внутрішніх механізмів, які призводять до виникнення коливань за формами a_3 і a_5. Важливо відмітити також, що в силу того, що в системі розглядається динамічне моментне збудження коливань підсумкова частота кутових коливань не збігається з частотою зовнішнього збудження і така відміна може бути суттєвою. Аналіз групи задач про динамічне збудження кутових коливань конструкції з рідиною за гармонічним законом і при імпульсному збудженні свідчить що ефект несиметричності профілів хвиль на вільній поверхні у випадку кутових коливань конструкції-носія проявляється значно слабше ніж у випадку поступального руху системи. В той же час збудження форми коливань з коловим номером 2 є більш вагомим для кутових коливань у порівнянні з випадком поступального руху конструкції-носія. Частоти, на яких відбуваються коливання системи є власними частотами коливань системи при врахуванні фактору сумісності руху рідини з вільною поверхнею і конструкції-носія, проте через нелінійні механізми можливі відхилення від цих значень, які одержуються на основі лінійної моделі. Найбільше ці відхилення мають місце у випадку гармонічного збудження коливань системи на резонансній частоті, тут проявляється два збіги частот: частоти форм з коловими номерами 0 і 1 збігаються, а частота коливань за формою з коловим номером 2 дорівнює подвоєній частоті кутових коливань системи.

Висновки. При аналізі задачі про вимушені нелінійні сумісні коливання циліндричного резервуара з рідиною з вільною поверхнею на маятниковому підвісі під дією імпульсного моменту, прикладеного до резервуару, встановлено, що результати нелінійного моделювання мають суттєві кількісні і якісні відмінності від випадку резонансного збудження коливань. Ці відмінності є малопомітними для кутового руху резервуара, проте для хвиль на вільній поверхні рідини вони є значними і переважно визначаються збудженням осесиметричної форми і форми, яка відповідає коловому номеру 2. Показано, що коливання за цими формами у резонансному випадку відбуваються із значним відхиленням від нуля їх середнього значення, проте у випадку коливань в дорезонансній і зарезонансній областях і у випадку перехідного процесу таке відхилення середніх значень є дуже слабким. Проаналізовані частоти, за якими відбуваються кутові коливання і коливання за формами з коловими номерами 1, 0 і 2. Показано, що в нелінійному випадку в системі створюються умови для прояву внутрішніх нелінійних резонансів через збіги частот (в тому числу подвоєних) коливань за окремими формами

Література

1. *KonstantinovA.V., Limarchenko O.S., Lukyanchuk V.V., Nefedov A.A.* Dynamic methods of damping the oscillation in structure–free-surface fluid system, Int. Appl. Mech., 2019. – 55, N 1. – P. 58-67.
2. *Limarchenko O.S., Matarazzo G.* Rotational motion of structures with tanks partially filled with liquid, – FADA Ltd. Kiev, 2003. – 286 p.
3. *Limarchenko O.S., Semenovich K.O.* Energy redistribution between the reservoir and liquid with free surface for angular motions of the system // J. of Mathem. Sci. – 2017. – 222, N 3. – P. 296 – 303.
4. *Onorato M.,Vozella L.,Proment D., Lvov V.* Route to thermalization in the α-Fermi – Pasta – Ulam system // PNAS. – 2015. – **112,** N 14. – P. 4208 – 4213.

Specificity of manifestation of nonlinearities for angular oscillations of the reservoir with liquid. Transient modes of motion

Oleg Limarchenko, Mykola Lavrenyuk, Katerina Semenovich

Theproblemabouttransient modes of motion of acylindricalreservoirwiththeliquidwithafreesurfaceon a pendulum suspension under short-time moment pulse applies to reservoir walls is under consideration. The problem is considered in nonlinear combined statement. It was ascertained that manifestation of internal mechanisms of nonlinear interaction between normal modes of oscillations of a liquid differs considerably from the case of harmonic moment disturbance on the resonant frequency. For advanced studying the nature of these differences we study problems about harmonic disturbance of oscillations for the system under the moment with a frequency, which is not resonant and immediately resonant disturbance. Theconductedanalysisshowedthespecificityofformationofnonlinearprocessesofinteractionbetweennormalmo desofoscillationsofafreesurface, which is variously absentfor problems of disturbance of oscillations on non-resonant frequencies and for pulse disturbance of motion. It was shown that in this case the known effect of exceed of the wave crest over the pit depth manifests considerably weaker than in the resonant mode for the translational mode of motion of a reservoir. The obtained results partially disclose internal mechanisms of development of nonlinear effects of disturbance of oscillations of different modes and energy exchange between them.

Keywords:idealliquid, freesurface, reservoiron pendulum suspension, combined motion, analysis of nonlinear effects of wave generation

Отримано 08.02.24.