

Узагальнення задачі Фарадея для механічної системи «резервуар – рідина» при наявності вертикального періодичного («пила») збурення

Олександр Константінов¹, Катерина Семенович²

¹Ст.н.сп., д.ф.-м.н., Інститут математики НАН України., 01001, Україна, Київ, вул. Терещенківська, 3, e-mail: akonst.im@ukr.net

²К.ф.-м.н., Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Україна, Київ, проспект академіка Глушкова, 4-е, e-mail: kateryna.semenovych@knu.ua

Розглянуто узагальнення класичної задачі Фарадея про параметричний резонанс вільної поверхні рідини при вертикальних коливаннях резервуару періодичним законом «пила». Побудовано області стійкості та нестійкості, які порівнюються з аналогічними результатами для класичної задачі Фарадея. Поведінка системи розглядається на основі нелінійної багатомодової моделі, яка описує сумісний рух резервуару та рідини під впливом зовнішнього силового збудження або кінематичного збурення. Показано, що коливання вільної поверхні рідини в обох випадках задачі Фарадея якісно подібні, і тому будь-яке із обраних типів збурень можна використовувати в дослідженнях про параметричний резонанс вільної поверхні рідини для отримання якісної картини динамічних процесів, які відбуваються в механічній системі «резервуар-рідина».

Ключові слова: рухомий резервуар, рідина з вільною поверхнею, задача Фарадея, параметричні коливання, області стійкості, збурення у формі «пила».

Вступ. Параметричний резонанс в рідині вперше був виявлений М. Faraday [5] в 1831 році, який експериментально досліджував коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, котрий рухається за гармонічним законом, і встановив, що перша резонансна частота вільної поверхні рідини дорівнює половині частоти збудження резервуара. J. Rayleigh [13] почав в 1877 році власні дослідження, маючи за мету як вдосконалення постановки експерименту, так створення математичної теорії, яка б була спроможна пояснити це явище. При цьому він використовував результати E. Mathieu [12] з теорії лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. T.V. Benjamin та F. Ursell [4], напевне, були першими, хто показав, що аналіз хвиль Фарадея в ідеальній рідині у вертикальному циліндричному резервуарі призводить до необхідності розв'язку класичного рівняння E. Mathieu. Вільна поверхня в їх роботі представлена як сума незалежних функцій (мод), амплітуди яких залежать від часу і є розв'язками рівняння E. Mathieu. Для кожної із мод в площині параметрів «амплітуда зовнішнього збурення H – частота зовнішнього збурення p » було побудовано області стійкості та нестійкості (так звані «резонансні» язики) та з'ясовано, що на площині « H – p » вони чергуються. Ці області розділені кривими [6, 9, 11], на яких розв'язки є гармонічними або субгармонічними, тим самим узгоджуючи спостереження М. Faradaya та L. Mathiessen. Фундаментальний огляд досліджень до 2015 року з параметричних коливань рідини з вільною поверхнею в резервуарі здійснено в роботі R.Ibrahim [7]. Пізніші роботи присвячені дослідженню

особливостей перехідних процесів у коливаннях рідини з вільною поверхнею при параметричному збуренні руху резервуару у формі тіла обертання [8, 10] або прямокутного резервуару з перегородками [14].

В даній роботі узагальнюється задача Фарадея про умови та особливості розвитку параметричного резонансу в системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли резервуар рухається вертикально з прискоренням, яке змінюється за пилкоподібним законом. На основі рівняння Хілла побудовано області стійкості та нестійкості, які порівнюються з аналогічними результатами для класичної задачі Фарадея. Поведінка системи розглядається на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі [3], яка описує сумісний рух резервуару та рідини під впливом зовнішніх силового збудження або кінематичного збурення. Використана модель побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

1. Математична модель механічної системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею».

Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи [3], математична модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» будується на

основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського $\delta I = 0$, де $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, при

цьому функція Лагранжа задається у класичному вигляді Гамільтона - Остроградського як різниця між кінетичною та потенціальною енергією системи

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}_3 \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - \frac{1}{2} \rho g \int_S (\xi^2 - H^2) dS + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon},$$

де ρ – щільність рідини; τ – область, яку займає рідина; r, θ, z – циліндричні координати, при цьому вісь Oz спрямована протилежно вектору прискорення вільного падіння \vec{g} ,

а система координат пов'язана з нерухомим резервуаром; $\vec{\nabla}_3 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}$; φ –

потенціал швидкостей рідини; ξ – збурення вільної поверхні; S – поперечний переріз циліндричного резервуара; H – глибина рідини в резервуарі; M_T – маса резервуара; M_F – маса рідини; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор переміщення резервуару у поступальному русі; \vec{F} – головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар, відносно початку координат.

Для ефективного застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського поставлено задачу ввести у розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуару з рідиною, тобто фактично будуються розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини відповідно до теореми Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні рідини ξ та радіус-вектор $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух самої рідини, і тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

Відповідно до методики роботи [3], розклади шуканих змінних представимо у вигляді

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_i a_i(t) \psi_i(r, \theta); \quad \varphi = \sum_i b_i(t) \varphi_i(r, \theta, z),$$

де $b_i(t)$, $a_i(t)$ – коефіцієнти розкладів ξ і φ по системах координатних функцій. Системи координатних функцій ψ_i і $\varphi_i = \psi_i \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh \kappa_i H}$ є розв’язком лінійної спектральної задачі [2] та мають вигляд

$$\psi_n(r, \theta) = \frac{J_n\left(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R} r\right)}{J_n(\kappa_n^{(m)})} \sin n\theta \quad (n=0, 1, 2, \dots; m=1, 2, \dots),$$

де $J_n(r)$ – функція Бесселя першого роду порядку n , $\kappa_n^{(m)}$ – корінь кратності n рівняння $J'_n(\kappa_n^{(m)}) = 0$. Відповідно до [3], коефіцієнти $b_i(t)$ є функціями $a_i(t)$, і тому в системі рівнянь (1) – (2) використовуються тільки коефіцієнти $a_i(t)$ – амплітуди форм коливань збуреної вільної поверхні рідини ξ .

У роботі [3] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дозволяє отримати дискретну модель механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” мінімальної розмірності. На основі розробленого методу, варіаційних методів математичної фізики та асимптотичних методів нелінійної механіки у роботі [3] побудована математична модель, яка дозволяє дослідити поступальні та кутові рухи механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового та моментного) збудження. Ця модель представляє собою систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини відносно деякої нерухомої системи відліку:

$$\begin{aligned} & \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \bar{B}_r^1 + \sum_i a_i \bar{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \bar{B}_{rijk}^4 \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r + \\ & + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \bar{B}_r^1 + \sum_i a_i (\bar{B}_{ir}^2 - \bar{B}_{ri}^2) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\bar{B}_{ijr}^3 - \bar{B}_{rij}^3) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\bar{B}_{ijk}^4 - \bar{B}_{rijk}^4) \right\}; \quad (1) \\ & \rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\bar{B}_i^1 + \sum_j a_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right] \right\} + (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon} = \end{aligned}$$

$$= \vec{F} - (M_T + M_F)g\vec{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2\vec{B}_{ijk}^3 \right\}. \quad (2)$$

Система (1) – (2) містить $N + 3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) та описує динаміку сумісного руху резервуару та рідини при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового) збудження. Рівняння (1) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку резервуара, однак ці рівняння взаємозв’язані та містять сили взаємодії між компонентами механічної системи. Модель отримана аналітично для довільної кількості форм коливань вільної поверхні рідини.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (1) – (2), у рамках прийнятої моделі визначає властивості механічної системи, яка розглядається, та особливості прояву в ній внутрішніх лінійних та нелінійних механізмів взаємодії. Ці коефіцієнти визначаються через квадратури від розв’язку крайової задачі із визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти $\beta_{ir}^q, \gamma_{ijr}^q, \delta_{ijk}^q, \alpha_r^s, N_r$ відповідають випадку коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти $\vec{B}_r^1, \vec{B}_{ri}^2, \vec{B}_{rij}^3, \vec{B}_{rijk}^4$ відображають взаємозв’язок коливань рідини та поступального руху резервуару. Повне отримання системи рівнянь (1) – (2) і формули для обчислення коефіцієнтів для загального випадку сумісного руху (поступального і кутового) руху циліндричного резервуару і рідини з вільною поверхнею наведено у роботі [3].

2. Побудова областей динамічної стійкості та нестійкості при заданому параметричному збуренні руху механічної системи

Рівняння (1) – (2) описують процес розвитку параметричних коливань в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли система рухається вертикально за заданим періодичним законом. Як відомо із теорії параметричних коливань [1], існують області в площині параметрів вертикального збурення «амплітуда H_z – частота p », коли розв’язки диференціальних рівнянь (1) – (2) будуть необмежено зростати, тобто області динамічної нестійкості. Побудова областей нестійкості буде відповіддю на питання: при яких значеннях параметрів «амплітуда H_z – частота p » зовнішнього кінематичного збурення резервуара система «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності будь-якого малого початкового збурення вільної поверхні рідини вийде на режим параметричного резонансу.

Для побудови областей динамічної стійкості та нестійкості запишемо лінеаризоване рівняння для форми з нижчою частотою ω_1 – першої антисиметричної форми a_1 – при наявності зовнішнього вертикального періодичного збурення резервуару ε_2 у вигляді

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_{11}^{2z} \ddot{\varepsilon}_2 a_1 + g N_1 a_1 = 0,$$

та перепишемо його в класичній формі рівняння Хілла, тобто

$$\ddot{a}_1 + \omega^2 (1 + \nu H_z \ddot{\Phi}_i(t)) a_1 = 0, \quad (3)$$

де введені позначення $\nu = \frac{B_{11}^{2z}}{gN_1}$, $\omega = \sqrt{\frac{gN_1}{\beta_{11}^q}}$ – власна частота першої антисиметричної

форми a_1 , а зовнішнє вертикальне кінематичне збурення руху резервуара будемо розглядати в двох випадках: в класичній задачі Фарадея прискорення резервуара буде

$$\ddot{\Phi}_1(t) = H_z \cos(pt),$$

в узагальненій задачі Фарадея прискорення резервуара має пилоподібну форму

$$\ddot{\Phi}_2(t) = H_z \left(1 - 4 \left\lfloor \frac{pt}{2\pi} - \left\lfloor \frac{pt}{2\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right\rfloor \right) \approx \frac{8}{\pi^2} \sum_k \frac{\cos(kpt)}{k^2}$$

(де $[x]$ – ціла частина значення x) і співпадає з $\ddot{\Phi}_1(t)$ у всіх точках максимуму, мінімуму та нулях (Рис. 3).

Область дійсних характеристичних чисел рівняння (3) співпадає з областю розв'язків, які необмежено зростають. З іншого боку, область комплексних характеристичних чисел відповідає обмеженим (майже періодичним) розв'язкам. Границям, які розділяють області дійсних та комплексних коренів, відповідають кратні корені, які мають значення 1 або -1. У випадку значення 1 характеристичного

кореня розв'язок диференціального рівняння буде періодичним з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$, а

у випадку значення -1 воно буде мати період $2T$.

Таким чином, області необмежено зростаючих розв'язків відокремлюються від областей стійкості періодичними розв'язками з періодом T або $2T$. А саме, два розв'язки одного періоду обмежують область нестійкості, два розв'язки різних періодів – область стійкості. Строго доведення цієї теореми наведено у [3]. З наведеної теореми випливає, що визначення границь областей нестійкості може бути зведено до пошуку умов, при яких диференціальне рівняння (3) має періодичні розв'язки з періодами T або $2T$.

Оскільки існування періодичних розв'язків і можливість їх розкладу у ряд Фур'є є фактом відомим, будемо шукати періодичний розв'язок у вигляді

$$a_1 = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \cos \frac{kpt}{2} + A_k \sin \frac{kpt}{2} \right), \quad (4)$$

де парним значенням $k = 2, 4, 6, \dots$ відповідають періодичні розв'язки періоду T , а непарним $k = 1, 3, 5, \dots$ – періодичні розв'язки періоду $2T$, причому номер k , яким ми обмежуємося у розкладі (4), означає номер області відповідного параметричного резонансу (зони нестійкості).

Для пошуку границь зони першого параметричного резонансу ($k = 1$) шукаємо періодичний розв'язок періоду $2T$ у вигляді

$$a_1 = B_1 \cos \frac{pt}{2} + A_1 \sin \frac{pt}{2}. \quad (5)$$

Підставляємо (5) у рівняння (3) та скористаємось методом Гальоркіна, а саме: помножимо рівняння (3) спочатку на $\cos \frac{pt}{2}$, потім на $\sin \frac{pt}{2}$, і отримані вирази

інтегруємо за періодом $2T$. В результаті отримуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно значень амплітуд A_1 та B_1 , яка, як відомо з лінійної алгебри, має відмінні від нуля розв'язки тільки у випадку, коли детермінант, складений із коефіцієнтів цієї системи, дорівнює нулю. Розкриваючи детермінант, отримаємо рівняння границь області першого параметричного резонансу в класичній задачі Фарадея

$$p = \sqrt{4 + 2\omega\nu H_z} \quad \text{і} \quad p = \sqrt{4 - 2\omega\nu H_z},$$

і в узагальненій задачі Фарадея

$$p = \frac{2\sqrt{\pi^2 + 4\nu H_z} \omega}{\pi} \quad \text{і} \quad p = \frac{2\sqrt{\pi^2 - 4\nu H_z} \omega}{\pi}.$$

Розклади границь рівнянь в ряд Тейлора відносно амплітуди зовнішнього збурення H_z надають можливість для будь-якої пари параметрів (H_z, p) оцінити різницю (Рис. 1) між границями зони першого параметричного резонансу в класичній задачі Фарадея

$$p = 2\omega + \frac{1}{2}\nu H_z \omega - \frac{1}{16}\nu^2 H_z^2 \omega + \frac{1}{64}\nu^3 H_z^3 \omega - \frac{5}{1024}\nu^4 H_z^4 \omega + \frac{7}{4096}\nu^5 H_z^5 \omega,$$

$$p = 2\omega - \frac{1}{2}\nu H_z \omega - \frac{1}{16}\nu^2 H_z^2 \omega - \frac{1}{64}\nu^3 H_z^3 \omega - \frac{5}{1024}\nu^4 H_z^4 \omega - \frac{7}{4096}\nu^5 H_z^5 \omega, \quad (6)$$

і в узагальненій задачі Фарадея

$$p = 2\omega + \frac{4}{\pi^2}\nu H_z \omega - \frac{4}{\pi^4}\nu^2 H_z^2 \omega + \frac{8}{\pi^6}\nu^3 H_z^3 \omega - \frac{20}{\pi^8}\nu^4 H_z^4 \omega + \frac{56}{\pi^{10}}\nu^5 H_z^5 \omega,$$

$$p = 2\omega - \frac{4}{\pi^2}\nu H_z \omega - \frac{4}{\pi^4}\nu^2 H_z^2 \omega - \frac{8}{\pi^6}\nu^3 H_z^3 \omega - \frac{20}{\pi^8}\nu^4 H_z^4 \omega - \frac{56}{\pi^{10}}\nu^5 H_z^5 \omega. \quad (7)$$

Для побудови границь зони другого параметричного резонансу шукаємо періодичний розв'язок періоду T у вигляді

$$a_1 = B_0/2 + B_2 \cos pt + A_2 \sin pt + A_4 \sin 2pt,$$

і, скориставшись знову методом Гальоркіна, отримаємо відповідні рівняння границь в класичній задачі Фарадея у вигляді

$$p = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{9 + 4\nu^2 H_z^2} \omega}}{4} \quad \text{та} \quad p = \frac{\sqrt{4 - 2\nu^2 H_z^2} \omega}{2},$$

і в узагальненій задачі Фарадея

$$p = \frac{\sqrt{90\pi^4 + 2\sqrt{729\pi^8 + 16384\pi^4\nu^2 H_z^2} \omega}}{12\pi^2} \quad \text{і} \quad p = \frac{\sqrt{\pi^4 - 32\nu^2 H_z^2} \omega}{\pi^2}.$$

Розклади рівнянь границь в ряд Тейлора відносно амплітуди зовнішнього збурення H_z надають можливість для будь-якої пари параметрів (H_z, p) оцінити різницю (Рис. 3) між границями зони другого параметричного резонансу в класичній задачі Фарадея

$$p = \omega + \frac{1}{24}\nu^2 H_z^2 \omega - \frac{19}{3456}\nu^4 H_z^4 \omega + \frac{313}{248832}\nu^6 H_z^6 \omega - \frac{25319}{71662616}\nu^8 H_z^8 \omega,$$

$$p = \omega - \frac{1}{4}v^2H_z^2\omega - \frac{1}{32}v^4H_z^4\omega - \frac{1}{128}v^6H_z^6\omega - \frac{5}{2048}v^8H_z^8\omega, \quad (8)$$

і в узагальненій задачі Фарадея

$$p = \omega + \frac{512}{243\pi^4}v^2H_z^2\omega - \frac{2490368}{177447\pi^8}v^4H_z^4\omega + \frac{21005074432}{129140163\pi^{12}}v^6H_z^6\omega, \\ p = \omega - \frac{16}{\pi^4}v^2H_z^2\omega - \frac{128}{\pi^8}v^4H_z^4\omega - \frac{2048}{\pi^{12}}v^6H_z^6\omega - \frac{40960}{\pi^{16}}v^8H_z^8\omega, \quad (9)$$

Рівняння границь зони третього параметричного резонансу для періодичного розв'язку періоду $2T$

$$a_1 = A_1 \sin \frac{pt}{2} + B_1 \cos \frac{pt}{2} + A_3 \sin \frac{3pt}{2} + B_3 \cos \frac{3pt}{2}$$

на основі методу Гальоркіна для класичної задачі Фарадея отримуємо у вигляді

$$p = \frac{\sqrt{20 + 9vH_z} - \sqrt{117v^2H_z^2 + 288vH_z + 256\omega}}{3} \text{ та} \\ p = \frac{\sqrt{20 - 9vH_z} - \sqrt{117v^2H_z^2 - 288vH_z + 256\omega}}{3},$$

а для узагальненої – у вигляді

$$p = \frac{2\sqrt{164\pi^2vH_z + 45\pi^4} - 4\sqrt{2329\pi^4v^2H_z^2 + 720\pi^6vH_z + 81\pi^8\omega}}{9\pi^2}, \text{ та} \\ p = \frac{2\sqrt{-164\pi^2vH_z + 45\pi^4} - 4\sqrt{2329\pi^4v^2H_z^2 - 720\pi^6vH_z + 81\pi^8\omega}}{9\pi^2}.$$

Розклади рівнянь границь в ряд Тейлора відносно амплітуди зовнішнього збурення H_z надають можливість для будь-якої пари параметрів (H_z, p) оцінити різницю між границями зони третього параметричного резонансу в класичній задачі Фарадея

$$p = \frac{2\omega}{3} + \frac{3}{32}v^2H_z^2\omega - \frac{27}{512}v^3H_z^3\omega + \frac{135}{4096}v^4H_z^4\omega - \frac{1215}{65536}v^5H_z^5\omega, \\ p = \frac{2\omega}{3} - \frac{3}{32}v^2H_z^2\omega - \frac{27}{512}v^3H_z^3\omega - \frac{135}{4096}v^4H_z^4\omega - \frac{1215}{65536}v^5H_z^5\omega, \quad (10)$$

і в узагальненій задачі Фарадея

$$p = \frac{2\omega}{3} + \frac{4}{\pi^2}vH_z\omega - \frac{1462}{243\pi^4}v^2H_z^2\omega + \frac{61244}{2187\pi^6}v^3H_z^3\omega - \frac{5447857}{39366\pi^8}v^4H_z^4\omega, \\ p = \frac{2\omega}{3} - \frac{4}{\pi^2}vH_z\omega - \frac{1462}{243\pi^4}v^2H_z^2\omega - \frac{61244}{2187\pi^6}v^3H_z^3\omega - \frac{5447857}{39366\pi^8}v^4H_z^4\omega. \quad (11)$$

Крім того, побудова рівнянь границь зони третього параметричного резонансу дозволяє уточнити рівняння границь зони першого параметричного резонансу в класичній задачі Фарадея

$$p = \frac{\sqrt{20 + 9\nu H_z + \sqrt{117\nu^2 H_z^2 + 288\nu H_z + 256\omega}}}{3} \text{ та}$$

$$p = \frac{\sqrt{20 - 9\nu H_z + \sqrt{117\nu^2 H_z^2 - 288\nu H_z + 256\omega}}}{3},$$

і в узагальненій задачі Фарадея

$$p = \frac{2\sqrt{164\pi^2\nu H_z + 45\pi^4 + 4\sqrt{2329\pi^4\nu^2 H_z^2 + 720\pi^6\nu H_z + 81\pi^8\omega}}}{9\pi^2}, \text{ та}$$

$$p = \frac{2\sqrt{-164\pi^2\nu H_z + 45\pi^4 + 4\sqrt{2329\pi^4\nu^2 H_z^2 - 720\pi^6\nu H_z + 81\pi^8\omega}}}{9\pi^2}.$$

Розклади рівнянь границь в ряд Тейлора відносно амплітуди зовнішнього збурення H_z надають можливість для будь-якої пари параметрів (H_z, p) оцінити різницю між уточненими границями зони першого параметричного резонансу в класичній задачі Фарадея

$$p = 2\omega + \frac{1}{2}\nu H_z \omega - \frac{1}{32}\nu^2 H_z^2 \omega - \frac{5}{512}\nu^3 H_z^3 \omega + \frac{45}{4096}\nu^4 H_z^4 \omega - \frac{433}{65536}\nu^5 H_z^5 \omega,$$

$$p = 2\omega - \frac{1}{2}\nu H_z \omega - \frac{1}{32}\nu^2 H_z^2 \omega + \frac{5}{512}\nu^3 H_z^3 \omega + \frac{45}{4096}\nu^4 H_z^4 \omega + \frac{433}{65536}\nu^5 H_z^5 \omega,$$

і в узагальненій задачі Фарадея

$$p = 2\omega + \frac{4}{\pi^2}\nu H_z \omega - \frac{2}{\pi^4}\nu^2 H_z^2 \omega - \frac{44}{9\pi^6}\nu^3 H_z^3 \omega + \frac{7093}{162\pi^8}\nu^4 H_z^4 \omega - \frac{151661}{729\pi^{10}}\nu^5 H_z^5 \omega,$$

$$p = 2\omega - \frac{4}{\pi^2}\nu H_z \omega - \frac{2}{\pi^4}\nu^2 H_z^2 \omega + \frac{44}{9\pi^6}\nu^3 H_z^3 \omega + \frac{7093}{162\pi^8}\nu^4 H_z^4 \omega + \frac{151661}{729\pi^{10}}\nu^5 H_z^5 \omega.$$

На Рис. 1 та 2 побудовано області стійкості та нестійкості відповідно в околі першого та другого резонансу в площині параметрів «частота - амплітуда» зовнішнього вертикального кінематичного збурення. Області нестійкості обмежені кривими з однаковими номерами. Область першого параметричного резонансу в класичній задачі Фарадея ширша, ніж в узагальненій (Рис. 1 та формули (6)– (7)). Однак спостерігається зворотна тенденція – при зростанні номеру резонансу область нестійкості в класичній задачі Фарадея звужується, а в узагальненій, навпаки, – розширюється. У випадку другого резонансу права границя області нестійкості в обох задачах співпадає ((Рис. 2 та формули (8)– (9)). У випадку третього резонансу область нестійкості в узагальненій задачі ширша, ніж у класичній (формули (10)– (11)). Причиною тому є наявність вищих складових спектру у функції прискорення резервуара $\ddot{\Phi}_2(t)$. При зниженні частоти параметричного збурення частоти вищих складових спектру функції $\ddot{\Phi}_2(t)$ стають дуже близькими до власної частоти

резервуара, а тому розширюють діапазон частот, які викликають в системі вихід на режим параметричного резонансу, і, відповідно, розширюють область нестійкості в площині параметрів «амплітуда - частота».

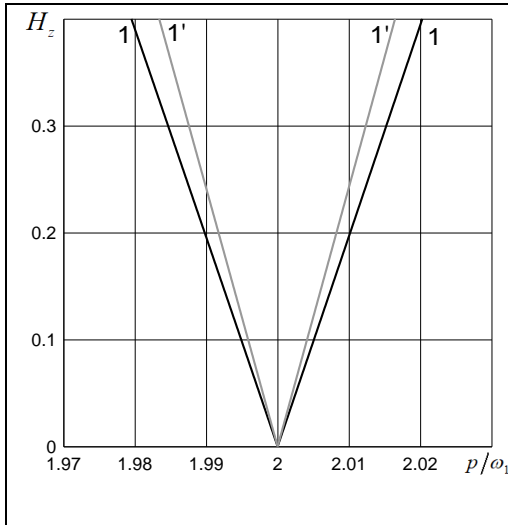


Рис. 1 Перша область параметричного резонансу (між двома кривими з однаковим номером; 1 – класична задача Фарадея, 1' – узагальнена задача Фарадея при збуренні $\Phi_2(t)$)

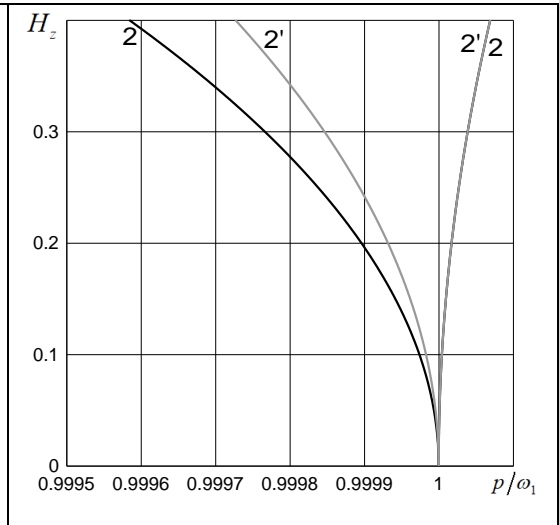


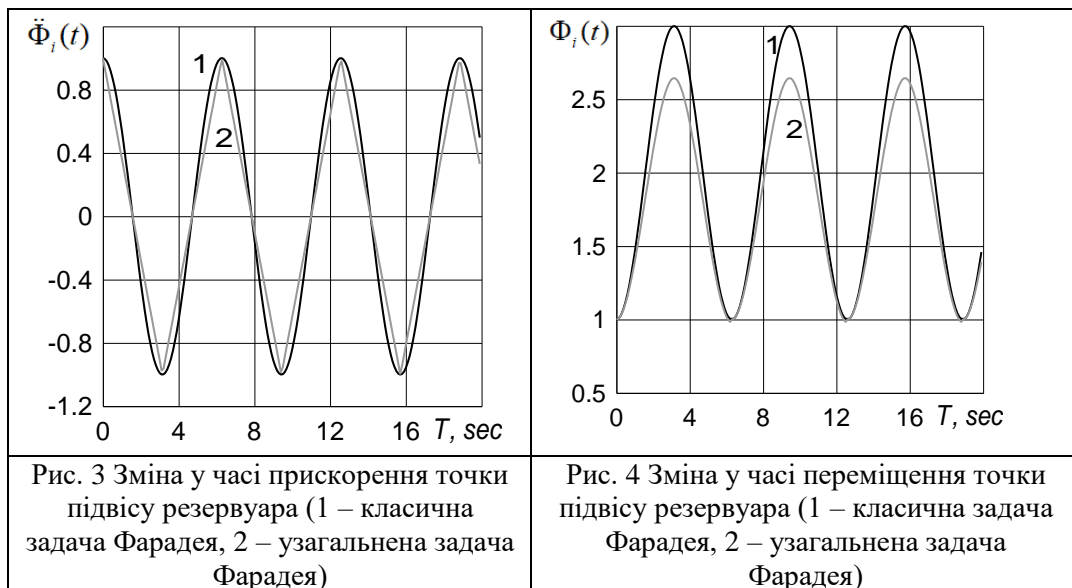
Рис. 2 Друга область параметричного резонансу (між двома кривими з однаковим номером; 2 – класична задача Фарадея, 2' – узагальнена задача Фарадея при збуренні $\Phi_2(t)$)

3. Результати обчислювальних експериментів.

Розглядається круговий циліндричний резервуар з вертикальною поздовжньою віссю Oz , який здійснює поступальні рухи в площині xOy . Резервуар радіусу $R = 1$ м та маси M_T частково заповнений водою з масою M_F до глибини $H = R$.

Система рівнянь (1) – (2) лінійна відносно других похідних, що дає можливість при практичній реалізації на кожному кроці чисельного інтегрування спочатку перетворити систему за допомогою ЕОМ до нормальної форми Коші, а потім чисельно інтегрувати за часом за допомогою стандартного методу Рунге–Кутта. При цьому на етапі перетворення до нормальної форми Коші порядок похідних знижувався шляхом введення узагальнених швидкостей \dot{a}_i як рівноправних незалежних змінних (разом з a_i).

При дослідженні динаміки системи резервуар – рідина в розкладах утримувалося $n_1 = n_2 = 12$ координатних функцій по лінійній і квадратичній теорії та $n_3 = 6$ координатних функцій по кубічній теорії. Координатні функції розміщено в порядку зростання відповідних їм власних частот за винятком ψ_6 – другої осесиметричної форми.



На Рис. 3 наведено графіки прискорення резервуара в вертикальній площині в класичній (крива 1, функція косинусу) та узагальненій задачі Фарадея (крива 2, «пила»). Як можна бачити з графіків, ці функції співпадають у точках максимуму, мінімуму та нулях. На Рис. 4 показано переміщення у часі резервуара в вертикальній площині для класичної (крива 1) та узагальненої (крива 2) задачі Фарадея. Як можна бачити з Рис. 4, амплітуда параметричного збурення у класичній задачі Фарадея на 20% більша, ніж в узагальненій.

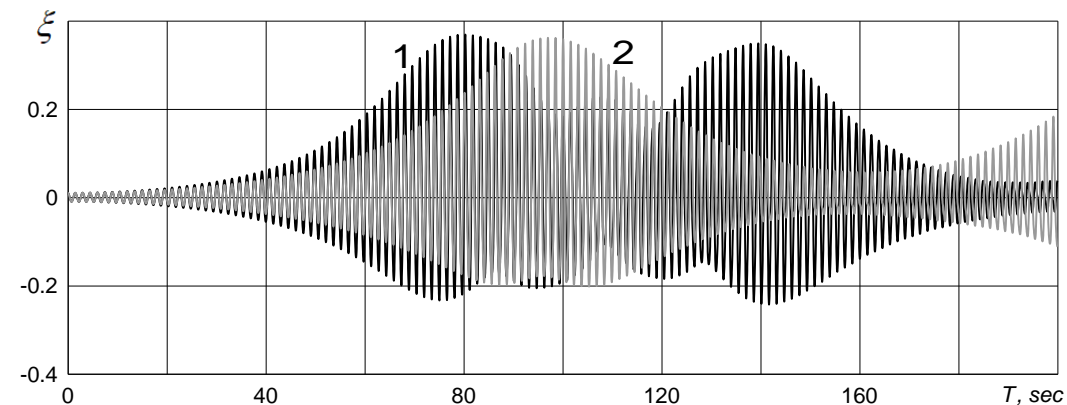


Рис. 5. Зміна у часі амплітуди коливань вільної поверхні рідини в околі першого параметричного резонансу (1 – класична задача Фарадея, 2 – узагальнена задача Фарадея)

При збуренні системи в околі першого резонансу (Рис. 5, 6) і в класичній, і в узагальненій задачі Фарадея спостерігається поступове збільшення амплітуди коливань вільної поверхні рідини на стінці резервуару з характерною амплітудною

модуляцією [2]. Для виходу системи у режим параметричного резонансу в околі другого резонансу (Рис. 6) необхідно у порівнянні з першим резонансом суттєво збільшити амплітуду зовнішнього збурення, однак характер коливань вільної поверхні рідини подібний до коливань в околі першого резонансу. Для графіків амплітуд характерна наявність зрізів та зламів, що є ознакою суттєвого впливу вищих форм коливань. Оскільки реакція вільної поверхні рідини під дією шуканих зовнішніх збурень якісно подібна, то можна використовувати будь-яке з них в теоретичних і експериментальних дослідженнях при розгляді задач про параметричні коливання.

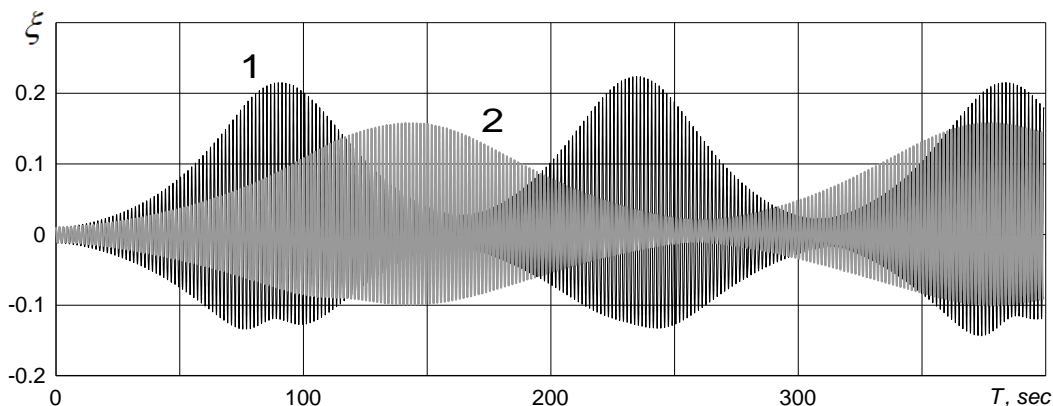


Рис. 6 Зміна у часі амплітуди коливань вільної поверхні рідини в околі другого параметричного резонансу (1 – класична задача Фарадея, 2 – узагальнена задача Фарадея)

Висновки. Розглянуто узагальнення класичної задачі Фарадея про параметричний резонанс вільної поверхні при вертикальних коливаннях резервуару. Узагальнюється задача Фарадея про умови та особливості розвитку параметричного резонансу в системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли резервуар рухається вертикально за періодичним законом «пила». На основі рівняння Хілла побудовано області стійкості та нестійкості, які порівнюються з аналогічними результатами для класичної задачі Фарадея. Поведінка системи розглядається на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі, яка описує сумісний рух резервуару та рідини під впливом зовнішнього силового збудження або кінематичного збурення. Показано, що коливання вільної поверхні рідини в обох випадках задачі Фарадея якісно подібні, і тому будь-яке із обраних типів збурень можна використовувати в дослідженнях про параметричний резонанс для отримання якісної картини коливань вільної поверхні рідини.

Література

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем.–М.: ГИТТЛ, 1956. –600 с.
2. Константінов О.В., Лимарченко О.С. Вихід на параметричний резонанс в узагальненій задачі Фарадея про рух резервуара з рідиною // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – Вип. 17. – С. 73–80.

Олександр Константинов, Катерина Семенович
Узагальнення задачі Фарадея для механічної системи «резервуар – рідина» при наявності вертикального періодичного («пила») збурення

3. *Лимарченко О.С., Ясинский В.В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ «КПИ», 1997. – 338 с.
4. *Benjamin T.B., Ursell F.* The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. – Proc. R. Soc. Lond. A. – 1954. – **225** (1163), P. 505–515.
5. *Faraday M.* On the forms and states assumed by fluids in contact vibrating elastic surfaces // Phil. Trans. of the Royal Society of London. – 1831. – **121**. – P. 319–346.
6. *Henderson D.M., Miles J.W.* Faraday waves in 2:1 internal resonance // J. Fluid Mech. – 1991. – 222. – P. 449–470.
7. *Ibrahim R.* Recent Advances in Physics of Fluid Parametric Sloshing and Related Problems// J. Fluid Engineering. – 2015. – **137** (9). – P. 1–52.
8. *Kovalets S., Limarchenko O., Melnik V.* Peculiarities of development of the generalized faraday effect for spherical and ellipsoidal reservoirs // Механіка гіроскопічних систем. – 2019. – №37. – С. 16–21.
9. *Lewis D. J.* The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proc. Royal Soc. of London. A. – 1950. – 202. – P. 81–96.
10. *Limarchenko O., Melnik V.* Parametric oscillations of liquid with a free surface in reservoir of conic shape// Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2015. – Вип. 21. – С. 133–138.
11. *Miles J.W.* Note on a parametrically excited trapped cross-wave // J. Fluid Mech. – 1985. – 151. – P. 391–394.
12. *Mathieu E.* Memoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique // J. Math. Pures Appli. – 1868. – 13. – P. 137–203.
13. *Rayleigh J.W.S.* Deep water waves, progressive or stationary, to the third order of approximation // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1915. – 91. – P. 345–353.
14. *Sanapala V.S.* Numerical simulation of parametric liquid sloshing in a horizontally baffled rectangular container // Journal of Fluids and Structures. – 2018. – **76**. – P. 229–250.

• **Generalization of the Faraday problem for the mechanical system «reservoir – liquid» in the presence of a vertical periodic (sawtooth) disturbance**

Oleksandr Konstantinov, Katerina Semenovich

The generalization of Faraday's classic problem about the parametric resonance of the free surface during vertical oscillations of the tank according to the periodic law of the modulus of the cosine is considered. Regions of stability and instability are designed, which are compared with similar results for the classical Faraday problem. The behavior of the system is considered on the basis of a nonlinear multimode model, which describes the combined movement of the tank and fluid under the influence of external force excitation or kinematic disturbance. It is shown, the oscillations of the free surface liquid in both cases of Faraday problem are qualitatively similar, and therefore any of the selected types of disturbances can be used in research on parametric resonance to obtain a qualitative effect on the oscillations of the free surface liquid.

Keywords: moving reservoir, free surface liquid, Faraday problem, parametric oscillations, stable area, sawtooth excitation.

Отримано 15.02.24.