

## Визначення та аналіз температурного поля у тришаровій пластині із заданим початковим розподілом температури

Роман Мусій<sup>1</sup>, Уляна Жидик<sup>2</sup>, Богдан Бандирський<sup>3</sup>, Ольга М'яус<sup>4</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., професор, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Ст. Бандери, 12, 79013, Львів, email: [roman.s.musii@lpnu.ua](mailto:roman.s.musii@lpnu.ua)

<sup>2</sup> к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Ст. Бандери, 12, 79013, Львів, email: [uliana.v.zhyduk@lpnu.ua](mailto:uliana.v.zhyduk@lpnu.ua)

<sup>3</sup> к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Ст. Бандери, 12, 79013, Львів, email: [bohdan.v.bandyrskiy@lpnu.ua](mailto:bohdan.v.bandyrskiy@lpnu.ua)

<sup>4</sup> к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. Ст. Бандери, 12, 79013, Львів, email: [olga.m.miaus@lpnu.ua](mailto:olga.m.miaus@lpnu.ua)

*Записано наближену систему двовимірних рівнянь теплопровідності для багатшарової ізотропної пластини. Сформульовано крайові умови для пластини скінчених розмірів прямокутної форми. Знайдено загальний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для даної пластини звикористанням інтегральних перетворень Фур'є за просторовими змінними та перетворення Лапласа за часом. На основі отриманих загальних розв'язків проаналізовано розв'язок задачі теплопровідності для тришарової пластини, що в початковий момент часу нагрівається лінійним за її товщиною температурним полем, яке рівномірно розподілене по поверхні пластини у прямокутній області. Числовий аналіз температурного поля виконано для тришарової пластини, середній шар якої виготовлений з металу, а зовнішні шари – з кераміки.*

**Ключові слова:** тришарова пластина, ізотропні матеріали, температурне поле, металокераміка.

**Вступ.** У сучасних технічних пристроях широко використовують тонкостінні елементи конструкцій, виготовлені з неоднорідних композитних матеріалів [1–4]. До неоднорідних матеріалів, зокрема, належать функціонально-градієнтні [5, 6], які володіють неперервною неоднорідністю та композити шаруватої структури [7–10]. В сучасних технологіях багатшаровість використовують для захисту від агресивного середовища, теплоізоляції, інтенсифікації передачі тепла, тощо. Для розрахунку теплових режимів тонкостінних елементів з неоднорідних матеріалів необхідна побудова відповідних моделей та розробка методів для розв'язування відповідних задач теплопровідності зокрема для аналізу температурних полів. Тому формулювання і розробка методів розв'язування задач теплопровідності для неоднорідних тонкостінних елементів конструкцій є актуальною науково-технічною задачею. По аналогії з задачею теорії пружності доцільно звести тривимірну задачу теплопровідності до відповідної двовимірної, яка є значно простішою для розрахунків температури. З літератури відомо, що таке зведення можна виконати різними методами: усередненням по товщині багатшарового тіла [8–10],

операторним [11], варіаційним [12] тощо. Детальніший огляд моделей і методів дослідження температурних полів в тонкостінних елементах конструкцій, зокрема, наведено в працях [9, 13, 14].

В даній статті побудована двовимірною математичною моделлю теплопровідності тонкостінних ізотропних неоднорідних пластин. На її основі проаналізовано температурне поле у тришаровій пластині, зумовлене початковим розподілом температури у прямокутній області поверхонь пластини.

## 1. Формулювання математичної моделі теплопровідності ізотропних пластин неоднорідної структури.

Розглянемо тонку прямокутну в плані пластину сталої товщини  $2h$ , яка нагрівається внутрішніми джерелами тепла та обмінюється теплом з навколишнім середовищем за законом Ньютона. Точки пластини належать до прямокутної Декартової системи координат  $x, y, z$  і займають по довжині пластини область  $[0, a]$ , по ширині – область  $[0, b]$ , по товщині – область  $[-h, h]$ . Матеріал пластини ізотропний і неоднорідний за її товщиною.

Температурне поле  $t(x, y, z, \tau)$  в пластині описується тривимірним рівнянням теплопровідності, яке після спрощення з точністю, що відповідає тонкостінним елементам конструкцій [2, 11], має вигляд

$$\lambda(z)\Delta t + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_t(z) \frac{\partial t}{\partial z} \right) - c_v(z) \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_t = 0. \quad (1)$$

Для знаходження розв'язку рівняння (1) необхідно задати в момент часу  $\tau = 0$  початкову умову

$$t|_{\tau=0} = t_0 \quad (2)$$

і одну з трьох крайових умов

$$t = t^{(s)}, \quad \lambda_t \frac{\partial t}{\partial n} = -q_s, \quad \lambda_t \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha_s (t - t_s^c) = 0$$

на поверхні  $S$ , що обмежує пластину. Тут  $\lambda(z)$  – коефіцієнт теплопровідності;  $c_v(z)$  – питома об'ємна теплоємність;  $\alpha_s$  – коефіцієнт тепловіддачі на поверхні  $S$ ;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $w_t$  – густина теплових джерел;  $t_s^c$  – температура довкілля;  $\tau$  – змінна часу;  $\bar{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні  $S$ .

Використовуючи відому гіпотезу Кірхгофа-Лява для тонкостінних конструкцій, зведемо сформульовану просторову задачу теплопровідності до відповідної двовимірної задачі. Для цього приймемо гіпотезу про лінійний характер розподілу температури по товщині пластини

$$t(x, y, z, \tau) = T_1(x, y, \tau) + \frac{z}{h} T_2(x, y, \tau). \quad (3)$$

Введемо інтегральні характеристики температури

$$T_i(x, y, \tau) = \frac{2i-1}{2h^i} \int_{-h}^h t(x, y, z, \tau) z^{i-1} dz, \quad (i=1, 2). \quad (4)$$

Зінтегруючи рівняння (1) відповідно до виразу (4) отримуємо таку систему двовимірних рівнянь:

$$A^\lambda \Delta T_1 - \varepsilon_1^t T_1 + B^\lambda \Delta T_2 - \varepsilon_2^t T_2 - A^c \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - B^c \frac{\partial T_2}{\partial \tau} + W_1^t = -f_1, \\ B^\lambda \Delta T_1 - \varepsilon_2^t T_1 + D^\lambda \Delta T_2 - \frac{A^\lambda}{h^2} T_2 - \varepsilon_1^t T_2 - B^c \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - D^c \frac{\partial T_2}{\partial \tau} + W_2^t = -f_2, \quad (5)$$

на інтегральні характеристики температури.

Тут

$$\{A^\lambda, B^\lambda, D^\lambda\} = \int_{-h}^h \lambda(z) \{1, z/h, (z/h)^2\} dz; \quad \{A^c, B^c, D^c\} = \int_{-h}^h c_v(z) \{1, z/h, (z/h)^2\} dz; \\ W_i^t = \int_{-h}^h w_i (z/h)^{i-1} dz;$$

$f_1, f_2$  – функції, що залежать від крайових умов на поверхнях  $z = \pm h$ .

Зокрема, для умов другого роду ці функції будуть:  $f_i = q^+ - (-1)^i q^-$ , а для умов третього роду мають вигляд  $f_i = t_1^z \varepsilon_i^t + t_2^z \varepsilon_{3-i}^t$ .

Тут:  $\varepsilon_i^t = (\alpha^+ - (-1)^i \alpha^-)$ ;  $t_i^z = \frac{1}{2} (t_z^+ - (-1)^i t_z^-)$  ( $i=1, 2$ );

$t_z^+, t_z^-$  – температури середовищ, що оточують поверхні  $z = h$  і  $z = -h$ ;

$\alpha^+, \alpha^-$  – коефіцієнти тепловіддачі з цих поверхонь;  $q^+, q^-$  – теплові потоки на них.

Для однозначності розв'язку до системи рівнянь (5) додаємо відповідні граничні умови:

на краях  $x = 0$  і  $x = a$  задаємо вирази  $d_0 T_1 + d_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}$  і  $d_2 T_2 + d_3 \frac{\partial T_2}{\partial x}$ ;

на краях  $y = 0$  і  $y = b$  – вирази  $d_4 T_1 + d_5 \frac{\partial T_1}{\partial y}$  і  $d_6 T_2 + d_7 \frac{\partial T_2}{\partial y}$ , ( $d_i = \text{const}$ ,  $i = \overline{0;7}$ ),

а також задаємо на інтегральні характеристики температури  $T_1$  і  $T_2$  початкові умови в момент часу  $\tau = 0$ .

Система рівнянь (5) разом з крайовими і початковими умовами на інтегральні характеристики температури  $T_1$  і  $T_2$  формує двовимірну крайову задачу теорії теплопровідності для тонкостінних неоднорідних ізотропних пластин. Неоднорідні конструкції можуть бути різних типів залежно від способу вираження теплофізичних властивостей матеріалу через товщинну координату  $z$

.У випадку, якщо ця залежність описується неперервною функцією, наприклад, степеневою

$$q(z) = q_m + (q_c - q_m) \left( \frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^k, \quad (6)$$

то такі матеріали належать до функціонально-градієнтних.

Тут  $k$  – параметр неоднорідності;

$q = \{\lambda, c\}$  – властивості неоднорідного матеріалу;

$q_c = \{\lambda_c, c_c\}$  і  $q_m = \{\lambda_m, c_m\}$  – властивості компонент такого матеріалу.

В даному випадку інтегральні характеристики виразів  $A^q = \{A^\lambda, A^c\}$ ,  $B^q = \{B^\lambda, B^c\}$ ,  $D^q = \{D^\lambda, D^c\}$  мають вигляд

$$A^q = \frac{2h(q_c + kq_m)}{k+1}, \quad B^q = \frac{2hk(q_c - q_m)}{(k+1)(k+2)},$$

$$D^q = \frac{2h[3q_c(k^2 + k + 2) + kq_m(k^2 + 3k + 8)]}{3(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Іншим типом неоднорідних конструкцій є шаруваті. Для них залежність властивостей від координати  $z$  виражається кусково-однорідною функцією [2]

$$q(z) = q_1 + \sum_{j=1}^{N-1} (q_{j+1} - q_j) S_+(z - z_j). \quad (7)$$

Тут

$q_j = \{\lambda^{(j)}, c^{(j)}\}$  – теплофізичні властивості  $j$ -го шару;

$z_j$  – координата границі розділу  $j$ -го і  $j+1$ -го шарів;

$S_+(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$ ;  $N$  – кількість шарів.

Таким чином, вирази для інтегральних характеристик властивостей матеріалу визначаємо за формулами

$$A^q = 2hq_1 + \sum_{j=1}^{N-1} (q_{j+1} - q_j)(h - z_j), \quad B^q = \frac{1}{2h} \sum_{j=1}^{N-1} (q_{j+1} - q_j)(h^2 - z_j^2),$$

$$D^q = \frac{2h}{3} q_1 + \frac{1}{3h^2} \sum_{j=1}^{N-1} (q_{j+1} - q_j)(h^3 - z_j^3).$$

Шаруваті конструкції можуть мати різну структуру залежно від товщини та кількості шарів і їх розміщення відносно середньої поверхні.

## 2. Методика розв'язування двовимірної задачі теплопровідності.

Розглянемо випадок, коли краї пластини підтримуються при нульовій температурі, а в початковий момент часу  $\tau = 0$  заданий розподіл температури.

Тоді на інтегральні характеристики температури  $T_1$  і  $T_2$  маємо такі крайові умови:

$$\text{на краях } x = 0 \text{ та } x = a - T_1 = T_2 = 0, \quad (8)$$

$$\text{на краях } x = 0 \text{ та } x = b - T_1 = T_2 = 0. \quad (9)$$

Відповідно в момент часу  $\tau = 0$  початкові умови на характеристики температури  $T_1$  і  $T_2$  запишуться:

$$T_1(x, y, 0) = T_1^0(x, y); \quad T_2(x, y, 0) = T_2^0(x, y). \quad (10)$$

Застосуємо до системи рівнянь (5) скінчені інтегральні перетворення Фур'є за змінними  $x$  та  $y$ . За врахування крайових умов (8), (9) отримуємо за часовою змінною  $\tau$  для коефіцієнтів Фур'є  $T_{1nm}, T_{2nm}$  інтегральних характеристик температури  $T_1$  і  $T_2$  таку систему рівнянь

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dT_{1nm}}{d\tau'} + C_2 \frac{dT_{2nm}}{d\tau'} + G1T_{1nm} + G2T_{2nm} &= f_{1nm}, \\ C_2 \frac{dT_{1nm}}{d\tau'} + C_3 \frac{dT_{2nm}}{d\tau'} + G3T_{1nm} + G4T_{2nm} &= f_{2nm}. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут

$$G1 = \Lambda_1(\mu_n^2 + \mu_m^2) + \text{Bi}_1; \quad G2 = G3 = \Lambda_2(\mu_n^2 + \mu_m^2) + \text{Bi}_2;$$

$$G4 = \Lambda_3(\mu_n^2 + \mu_m^2) + \Lambda_1 + \text{Bi}_1;$$

$$\mu_m = \frac{\pi mh}{a}; \quad \mu_n = \frac{\pi nh}{b}; \quad \tau' = \frac{\lambda_0}{c_v^0 h^2} \tau; \quad \text{Bi}_i = \frac{\varepsilon_i^t h}{2\lambda_0}, \quad (i=1,2);$$

$$\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\} = \frac{1}{2h\lambda_0} \{A^\lambda, B^\lambda, D^\lambda\}; \quad \{C_1, C_2, C_3\} = \frac{1}{2hc_v^0} \{A^c, B^c, D^c\}.$$

$f_{1nm}, f_{2nm}$  – коефіцієнти Фур'є для функцій  $f_1(x, y, \tau)$  і  $f_2(x, y, \tau)$  температурних навантажень. Відповідно функції  $f_1(x, y, \tau)$  і  $f_2(x, y, \tau)$  мають вигляд:

$$f_1(x, y, \tau) = \text{Bi}_1 t_1^z + \text{Bi}_2 t_2^z + W_1^t \frac{h}{2\lambda_0} = Q_1(x, y) f_1^t(\tau),$$

$$f_2(x, y, \tau) = \text{Bi}_2 t_1^z + \text{Bi}_1 t_2^z + W_2^t \frac{h}{2\lambda_0} = Q_2(x, y) f_2^t(\tau).$$

Вирази  $Q_1(x, y)$ ,  $Q_2(x, y)$  – функції, що описують розподіл температурного навантаження залежно від поверхневих координат  $x$ ,  $y$ . Функції  $f_1^t(\tau)$  і  $f_2^t(\tau)$  описують часові залежності температурних навантажень.

Застосовуючи до системи рівнянь (11) інтегральне перетворення Лапласа за часом  $\tau'$  з врахуванням початкових умов (10), записуємо загальні вирази для інтегральних характеристик  $T_1$  і  $T_2$  температури

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{1}{C^*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1, i \neq j=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{p_i - p_j} \{ [(C_3 p_i - G4) Q_{1nm} Z_{1i}(\tau') - (C_2 p_i - G2) Q_{2nm} Z_{2i}(\tau')] + \\
 &+ [(C_3 p_i - G4) \tilde{T}_{nm}^0 - (C_2 p_i - G2) \bar{T}_{nm}^0] e^{-p_i \tau'} \} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \\
 T_2 &= \frac{1}{C^*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1, i \neq j=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{p_i - p_j} \{ [(C_1 p_i - G1) Q_{2nm} Z_{2i}(\tau') - (C_2 p_i - G3) Q_{1nm} Z_{1i}(\tau')] + \\
 &+ [(C_1 p_i - G1) \bar{T}_{nm}^0 - (C_2 p_i - G3) \tilde{T}_{nm}^0] e^{-p_i \tau'} \} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Тут:

$-p_1$  і  $-p_2$  – корені квадратного рівняння

$$C^* p^2 + [C_1 G4 + C_3 G1 - C_2 (G3 + G2)] p + G1 G4 - G2 G3 = 0;$$

$$C^* = C_1 C_3 - (C_2)^2;$$

$$\tilde{T}_{nm}^0 = C_1 T_{1nm}^0 + C_2 T_{2nm}^0; \quad \bar{T}_{nm}^0 = C_2 T_{1nm}^0 + C_3 T_{2nm}^0; \quad Z_{ji}(\tau') = \int_0^{\tau'} f_j^t(v) e^{-p(\tau'-v)} dv.$$

Вирази  $T_{jnm}^0, Q_{jnm}$  мають вигляд

$$\{T_{jnm}^0, Q_{jnm}\} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \{T_j^0, Q_j\}(x, y) \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} dx dy, \quad (j, i = 1, 2) \quad (13)$$

За отриманими виразами (12) інтегральних характеристик  $T_1$  і  $T_2$  температури з врахуванням подання (13) тривимірне температурне поле  $t(x, y, z, \tau)$  в пластині знаходимо за формулою (3).

### 3. Температурне поле тришарової пластини нерегулярної несиметричної структури.

Розглянемо тришарову пластину нерегулярної несиметричної структури. Нехай для неї теплофізичні властивості таких шарів дорівнюють  $q_j = \{\chi^{(j)}, c^{(j)}\}$ ,  $(j = 1, 2, 3)$ . Відповідно  $h_1, h_2$  і  $h_3$  – товщини нижнього, середнього і верхнього

шарів, причому  $h_1 + h_2 + h_3 = 2h$ . Тоді для виразів інтегральних характеристик функцій, що описують теплофізичні властивості таких шарів маємо такі формули:

$$A^q = h \left[ \frac{h_1}{h} q_1 - \left( \frac{h_1 + h_3}{h} - 2 \right) q_2 + \frac{h_3}{h} q_3 \right],$$

$$B^q = \frac{h}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{h_1}{h} - 1 \right)^2 - 1 \right] q_1 - \left[ \left( \frac{h_1}{h} - 1 \right)^2 - \left( \frac{h_3}{h} - 1 \right)^2 \right] q_2 - \left[ \left( \frac{h_3}{h} - 1 \right)^2 - 1 \right] q_3 \right\},$$

$$D^q = \frac{h}{3} \left\{ \left[ \left( \frac{h_1}{h} - 1 \right)^3 + 1 \right] q_1 - \left[ \left( \frac{h_1}{h} - 1 \right)^3 + \left( \frac{h_3}{h} - 1 \right)^3 \right] q_2 + \left[ \left( \frac{h_3}{h} - 1 \right)^3 + 1 \right] q_3 \right\}.$$

Нехай в початковий момент часу  $\tau=0$  пластина нагрівається лінійним за товщиною температурним полем, яке рівномірно розподілене на поверхні пластини у прямокутній області  $[2d \times 2\eta]$ . Між поверхнями  $z = \pm h$  і довкіллям відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона. Умови теплообміну на поверхнях  $z = \pm h$  однакові:  $\alpha^+ = \alpha^- = \alpha_z$ ,  $t_z^+ = t_z^- = 0$ , а джерела тепла відсутні. За таких умов вираз температурного поля в початковий момент часу  $\tau=0$  має вигляд

$$t_0(x, y, z, 0) = t^* \left( 1 + \frac{z}{h} \right) N(x) N(y). \quad (14)$$

Тут

$$N(x) = S_-(x - (x_0 - d)) - S_+(x - (x_0 + d));$$

$$N(y) = S_-(y - (y_0 - \eta)) - S_+(y - (y_0 + \eta));$$

$S_{\pm}(x)$  – асиметричні одиничні функції [2];

$2d$  і  $2\eta$  – розміри області нагріву;

$(x_0, y_0)$  – координати центра цієї області;  $t^* = \text{const}$ .

Коефіцієнти Фур'є  $T_{1mn}^0$  і  $T_{2mn}^0$  для інтегральних характеристик  $T_1$  і  $T_2$  температури знаходимо із співвідношень (13)

$$T_{1mn}^0 = T_{2mn}^0 = \frac{16t^*}{m\pi^2} \sin \frac{\pi m x_0}{a} \sin \frac{\pi n y_0}{b} \sin \frac{\pi m d}{a} \sin \frac{\pi n \eta}{b}.$$

#### 4. Числовий аналіз

Проаналізовано температурне поле тришарової пластини, за матеріали шарів якої вибрано метал і кераміку [1]. Лицеві шари пластини виготовлені з металу, що має

такі теплофізичні характеристики:  $\lambda^{(1)} = 18.1 \text{ W/mK}$ ;  $c_v^{(1)} = 3.56 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3 \text{ K}$ . Середній шар виготовлений з кераміки. Її теплофізичні характеристики рівні:  $\lambda^{(2)} = 2.036 \text{ W/mK}$ ;  $c_v^{(2)} = 3.45 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3 \text{ K}$ . Значення інших параметрів такі:

$$x_0 = a/2; y_0 = b/2; d/a = 0.25; \eta/b = 0.25; \lambda_0 = \lambda^{(1)}; c_v^0 = c_v^{(1)}.$$

Для заданої структури тришарової пластини обчислено значення безрозмірної температури  $t' = \frac{t}{t^*}$  на зовнішній поверхні  $z = h$  в центрі нагрітої області для різних значень геометричних і теплофізичних параметрів.

Рис. 1 ілюструє зміну температури  $t'$  уздовж координати  $x' = x/a$  від середини нагрітої області до краю пластини в різні моменти часу  $\tau' = 0.01; 0.05; 0.5; 1; 2$  для значення критерію Біо  $Bi = 0.5$ . На рис. 2 показано зміну температури  $t'$  за часом  $\tau'$  для різних значень безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі  $Bi = 0.1; 0.5; 1; 2$ . Значення інших параметрів прийняті такими:  $a/b = 1; h_2/h_1 = 1; h/a = 0.025$ .

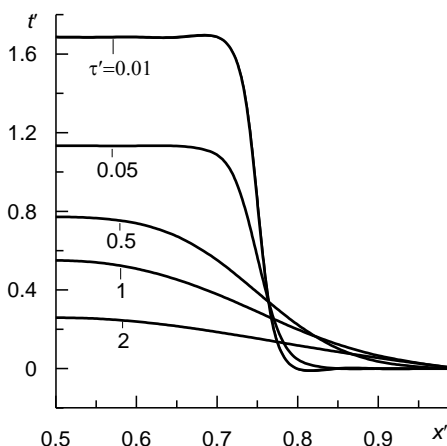


Рис.1.

Зміна температури  $t'$  уздовж координати  $x' = x/a$  в різні моменти часу  $\tau'$

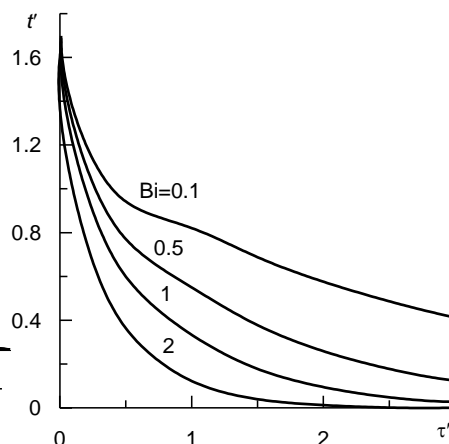


Рис.2.

Зміна температури  $t'$  за часом  $\tau'$  для різних значень критерію Біо  $Bi$ .

Встановлено, що в початкові моменти часу  $\tau'$  температура є сталою в області нагріву, а поза нею різко спадає до нуля. З плином часу  $\tau'$  внаслідок тепловіддачі температура зменшується і вирівнюється в усій області пластини. Спадання температури відбувається інтенсивніше зі збільшенням коефіцієнта тепловіддачі.



Залежність температури  $t'$  від розмірів пластини (параметра  $a/b$ ) для різних значень відношення товщин шарів  $h_2/h_1 = 0; 1; 4; 8$  і  $h/a = 0.025$  показано на рис. 3. Рис. 4 ілюструє зміну температури залежно від матеріалу зовнішніх шарів (параметра відношення коефіцієнтів теплопровідності  $\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)}$ ) для різних значень параметра товщини пластини  $h/a = 0.02; 0.025; 0.05; 0.075$  і  $h_2/h_1 = 1, a/b = 1$ .

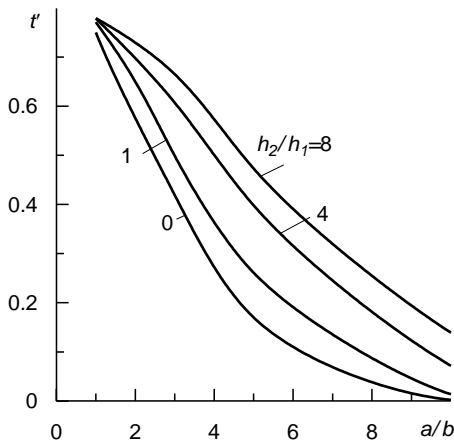


Рис. 3.

Залежність температури  $t'$  від параметра  $a/b$  для різних значень відношення товщин шарів  $h_2/h_1$

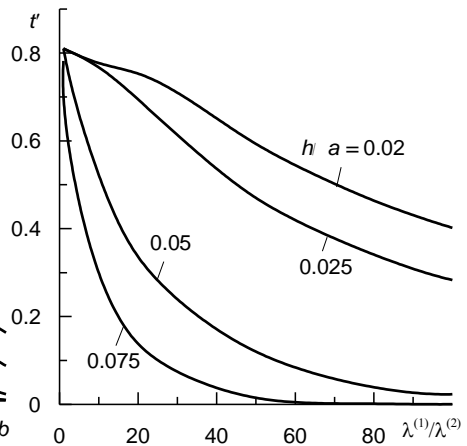


Рис.4

Зміна температур  $t'$  залежно від відношення коефіцієнтів тепло провідності  $\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)}$  для різних значень параметра  $h/a$

Інші значення параметрів на рис. 3, 4 вибрано такими:  $Bi = 0.5, \tau' = 0.5$ .

Встановлено, що найбільшого значення для квадратної пластини температура досягає в області нагріву. В заданий момент часу зі зменшенням товщини середнього керамічного шару температура пластини зменшується. Зі збільшенням теплопровідності зовнішніх металевих шарів температура пластини спадає. Таким чином, чим більша товщина пластини, тим більша інтенсивність спадання її температури. На основі виявлених закономірностей можна зробити висновок, що підбором відповідних розмірів пластини, матеріалів її складових шарів та співвідношення їх товщин можна досягти заданої температури розглядуваної тришарової пластини.

**Висновки.** Використовуючи наближення Кірхгофа, для неоднорідних по товщині ізотропних пластин виведено лінійні двовимірні рівняння теплопровідності за умов конвективного теплообміну між зовнішніми поверхнями пластини і довкіллям. З використанням скінченого подвійного перетворення Фур'є за

поверхневими координатами та інтегрального перетворення Лапласа за часом побудовано розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для прямокутної пластини скінченних розмірів за умови її нагрівання заданою в початковий момент часу температурою. Числовий аналіз температурного поля виконано для тришарової пластини нерегулярної структури, зовнішні шари якої виготовлені з металу, а внутрішній шар з кераміки. Досліджено вплив геометричних та теплофізичних параметрів на величину температурного поля на зовнішній поверхні. Результати досліджень можуть бути використані для оцінки температурних полів в композитних пластинах шаруватої структури та в пластинах з односторонніми та двосторонніми покриттями.

### Література

- [1] *Encyclopedia of Thermal Stresses*/R. Hetnarski (ed.). – Springer, 2014. – Vol. 11. P. 5835-6643.
- [2] *Коляно Ю.М.* Методи теплопровідності та термопружності неоднорідних тіл. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
- [3] *Varelis D., Saravanos D.A.* A coupled nonlinear plate finite element for thermal buckling and postbuckling of piezoelectric composite plates including thermomechanical effects // *J. Thermal Stresses.* – 2022. – **45**, №1. – P. 30–50.
- [4] *Жидик У.В., Флячок В.М.* Термопружний аналіз неоднорідних анізотропних пластин // Науковінотатки. Луцьк: ЛНТУ. – 2011. Вип. 33. – С. 281-287.
- [5] *Manthena V.R., Kedar G.D.* On thermoelastic problem of a thermosensitive functionally graded rectangular plate with instantaneous point heat source // *J. Thermal Stresses.* – 2019. – **42**, №7. – P. 849–862.
- [6] *Ohmichi M., Noda N., Sumi N.* Plane heat conduction problems in functionally graded orthotropic materials // *J. Thermal Stresses.* – 2017. – **40**, № 6. – P. 747–764.
- [7] *Brishetto S., Carrera E.,* Heat conduction and thermal analysis in multilayered plates and shells // *J. Mech. Res. Commun.* – 2011. – **38**, № 6. – P. 449–455.
- [8] *Флячок В. М.* Рівняння нестационарних температурних полів для багатошарових анізотропних оболонок з урахуванням теплової інерції. Доп. НАУ. Сер. Механіка. 2000. № 2. С. 60–63.
- [9] *Shvets R.M., Flyachok V.M.,* Heat conduction equations for multilayer anisotropic shells // *J. Therm. Stresses.* – 1999. – **22**, № 2. – P. 241–254.
- [10] *Жидик У.В., Флячок В.М.* Температурні поля в пологих оболонках шаруватої структури // Квалілогія книги. – 2017. – № 1 (31). – С. 94–97.
- [11] *Подстригач Я.С., Швець Р.Н.* Термопружність тонких оболонок. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с.
- [12] *Flyachok V.M.* Variational theorem for the dynamical problem of coupled mechanothermodiffusion in inhomogeneous anisotropic shells with distortions // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2016. – Vol. **215**, № 1. – P. 79-88.
- [13] *Thai H.T., Kim S.E.* A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // *Compos. Struct.* – 2015. – **128**, №1. – P. 70-86.
- [14] *Swaminathan K., Sangeetha D.M.* Thermal analysis of FGM plates – a critical review of various modeling techniques and solution methods // *Composite Structures.* – 2017. – **160**, №1. – P. 43-60.

## DETERMINATION AND ANALYSIS OF THE TEMPERATURE FIELD IN A THREE-LAYER ISOTROPIC PLATE WITH A GIVEN INITIAL TEMPERATURE DISTRIBUTION

Roman Musii, Uliana Zhydyk, Bohdan Bandytskyi

*An approximate system of two-dimensional heat conduction equations for a multilayer isotropic plate is written down. Boundary conditions for a rectangular plate of finite dimensions are formulated. A general solution of the non-stationary heat conduction problem for this plate was found using integral Fourier transforms in spatial variables and Laplace transform in time. On the basis of the obtained general solutions, the solution of the thermal conductivity problem for a three-layer plate, which at the initial moment of time is heated by a temperature field linear in its thickness, which is uniformly distributed over the surface of the plate in a rectangular region, was analyzed. The numerical analysis of the temperature field was performed for a three-layer plate, the middle layer of which is made of metal, and the outer layers are made of ceramics.*

**Keywords:** moving tank, liquid with a free surface, Faraday's problem, parametric oscillations, parametric resonance, regions of stability.

Отримано: 27.10.2023 р.