УДК 539.595

DOI10.15407/fmmit2023.38.020

Узагальнення задачі Фарадея для механічної системи «резервуар – рідина» при наявності вертикального періодичного (негармонічного) збурення

Олександр Константінов

ст. н. сп., д.ф.-м.н., Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, м. Київ, 01001,
e-mail: akonst.im@ukr.net

Розглянуто узагальнення класичної задачі Фарадея про параметричний резонанс вільної поверхні при вертикальних коливаннях резервуаруза періодичним законом модуля косинуса. Побудовано області стійкості та нестійкості, які порівнюються з аналогічними результатами для класичної задачі Фарадея. Поведінка системи розглядається на основі нелінійної багатомодової моделі, яка описує сумісний рух резервуару та рідини під впливом зовнішнього силового збудження або кінематичного збурення. Показано, що на відміну від класичного випадку параметричний резонанс в областях резонансу з непарними номерами відсутній. Для областей з парними номерами, навпаки, характерне збільшення ширини області нестійкості, амплітуди коливань вільної поверхні рідини та впливу вищих форм коливань.

Ключові слова:рухомий резервуар, рідина з вільною поверхнею, задача Фарадея, параметричні коливання, параметричний резонанс, області стійкості.

Вступ. Перше експериментальне дослідження процесу параметричного резонансу в механічній системі «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» проведено Фарадеєм у 1831 році [6]. Циліндричний резервуар, частково заповнений водою, був встановлений на спеціальному лабораторному устаткуванні і мав можливість рухатись у вертикальній площині за заданим гармонічним законом. Результатом експерименту було встановлення Фарадеєм того факту, що перша резонансна частота вільної поверхні рідини дорівнює половині частоті збурення резервуару. В подальшому в роботі [5] були вперше побудовані області стійкості та нестійкості параметричних коливань системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в площині параметрів «частота – амплітуда» зовнішнього вертикального кінематичного збурення. Криві, які обмежують області стійкості та нестійкості, є періодичними розв'язками диференціального рівняння Мат'є [7], якщо зовнішнє кінематичне збурення резервуару змінюється у часі за гармонічним законом. У випадку, коли зовнішнє кінематичне збурення резервуару є багаточастотною періодичною функцією, рівняння параметричних коливань механічної системи називають рівнянням Хілла.

В даній роботі узагальнюється задача Фарадея про умови та особливості розвитку параметричного резонансу в системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли резервуар рухається вертикально за періодичним законом модуль косинуса. На основі рівняння Хілла побудовано області стійкості та нестійкості, які порівнюються з аналогічними результатами для класичної задачі Фарадея. Поведінка системи розглядається на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі [3], яка описує сумісний рух резервуару та рідини під впливом зовнішніх силового збудження або кінематичного збурення. Використана модель побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

1. Математична модель механічної системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею».

Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи [3], математична модель механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею“ будується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського $\delta I = 0$, де $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$ при цьому функція Лагранжа задається у класичному вигляді Гамільтона - Остроградського як різниця між кінетичною та потенціальною енергією системи

$$L = \frac{1}{2}\rho\int_{\tau}(\vec{\nabla}_3\varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2}M_T(\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F)g\varepsilon_z - \frac{1}{2}\rho g\int_{S}(\xi^2 - H^2)dS + \vec{F}\cdot\vec{\varepsilon},$$

де ρ – щільність рідини; τ – область, яку займає рідина; r, θ, z – циліндричні координати, при цьому вісь Oz спрямована протилежно вектору прискорення вільного падіння $\vec{g}$, а система координат пов’язана з нерухомим резервуаром; $\vec{\nabla}_3 = \vec{i}_1\frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{i}_3\frac{\partial}{\partial z}$; $\vec{\nabla}_2 = \vec{i}_1\frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$; φ – потенціал швидкостей рідини; ξ – збурення вільної поверхні; S – поперечний переріз циліндричного резервуара; H – глибина рідини в резервуарі; M_T – маса резервуара; M_F – маса рідини; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор переміщення резервуару у поступальному русі; $\vec{F}$ – головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар, відносно початку координат.

Для ефективного застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського поставлено задачу ввести у розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуару з рідиною, тобто фактично будуються розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини відповідно до теореми Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні рідини ξ та радіус-вектор $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух самої рідини, і тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

Відповідно до методики роботи [3], розклади шуканих змінних представимо у вигляді

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_i a_i(t)\psi_i(r, \theta); \; \varphi = \sum_i b_i(t)\varphi_i(r, \theta, z),$$

де $a_i(t)$ – амплітуди форм коливань збуреної вільної поверхні рідини ξ. Системи функцій ψ_i і $\varphi_i = \psi_i \dfrac{\cosh\kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh\kappa_i H}$ є розв'язком лінійної спектральної задачі [2] та мають вигляд

$$\psi_n(r,\theta) = \frac{J_n\left(\dfrac{\kappa_n^{(m)}}{R} r\right)}{J_n(\kappa_n^{(m)})} \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} n\theta \quad (n = 0,\ 1,\ 2,...;\ m = 1,\ 2,...),$$

де $\kappa_n^{(m)}$ – корінь кратності n рівняння $J'_n(\kappa_n^{(m)}) = 0$.

У роботі [3] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дозволяє отримати дискретну модель механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" мінімальної розмірності. На основі розробленого методу, варіаційних методів математичної фізики та асимптотичних методів нелінійної механіки у роботі [3] побудована математична модель, яка дозволяє дослідити поступальні та кутові рухи механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового та моментного) збудження. Ця модель представляє собою систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини відносно деякої нерухомої системи відліку:

$$\sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijkr}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \frac{1}{2} g\alpha_r^s - gN_r a_r +$$

$$+ \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i (\vec{B}_{ir}^2 - \vec{B}_{ri}^2) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\vec{B}_{ijr}^3 - \vec{B}_{rij}^3) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\vec{B}_{ijkr}^4 - \vec{B}_{rijk}^4) \right\}; \tag{1}$$

$$\rho\left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right] \right\} + (M_T + M_F)\ddot{\vec{\varepsilon}} =$$

$$= \vec{F} - (M_T + M_F) g\vec{k} - \rho\left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2\vec{B}_{ijk}^3 \right\}. \tag{2}$$

Система (1) – (2) містить $N + 3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) та описує динаміку сумісного руху резервуару та рідини при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового) збудження. Рівняння (1) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку резервуара, однак ці рівняння взаємозв'язані та містять сили взаємодії між компонентами механічної системи. Модель отримана аналітично для довільної кількості форм коливань вільної поверхні рідини.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (1) – (2), у рамках прийнятої моделі визначає властивості механічної системи, яка розглядається, та особливості прояву в ній внутрішніх лінійних та нелінійних механізмів взаємодії. Ці коефіцієнти визначаються через квадратури від розв'язку крайової задачі із визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти β_{ir}^{q}, γ_{ijr}^{q}, δ_{ijkr}^{q}, α_{r}^{s}, N_r відповідають випадку коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти $\vec{B}_{r}^{1}$, $\vec{B}_{ri}^{2}$, $\vec{B}_{rij}^{3}$, $\vec{B}_{rijk}^{4}$ відображають взаємозв'язок коливань рідини та поступального руху резервуару. Повне отримання системи рівнянь (1) – (2) і формули для обчислення коефіцієнтів для загального випадку сумісного руху (поступального і кутового) руху циліндричного резервуара і рідини з вільною поверхнею наведено у роботі [3].

2. Побудова областей динамічної стійкості та нестійкості при заданому параметричному збуренні руху механічної системи

Рівняння (1) – (2) описують процес розвитку параметричних коливань в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли система рухається вертикально за заданим періодичним законом. Як відомо із теорії параметричних коливань [1,4], існують області в площині параметрів вертикального збурення «амплітудаH_z– частотаp», коли розв'язки диференціальних рівнянь (1) – (2) будуть необмежено зростати, тобто області динамічної нестійкості. Побудова областей нестійкості буде відповіддю на питання: при яких значеннях параметрів «амплітуда H_z – частотаp» зовнішнього кінематичного збурення резервуара система «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності будь-якого малого початкового збурення вільної поверхні рідини вийде на режим параметричного резонансу.

Для побудови областей динамічної стійкості та нестійкості запишемо лінеаризоване рівняння для форми з нижчою частотоюω_1 – першої антисиметричної форми a_1 – при наявності зовнішнього вертикального періодичного збурення резервуару ε_zу вигляді

$$\ddot{a}_1\beta_{11}^{q} + B_{11}^{2z}\ddot{\varepsilon}_z a_1 + gN_1 a_1 = 0\,,$$

та перепишемо його в класичній формі рівняння Хілла, тобто

$$\ddot{a}_1 + \omega_1^2(1+\nu H_z\ddot{\Phi}_i(t))a_1 = 0, \tag{3}$$

де зовнішнє вертикальне кінематичне збурення руху резервуара будемо розглядати в двох випадках: в класичній задачі Фарадея

$$\Phi_1(t) = H_z\cos(pt),$$

в узагальненій задачі Фарадея(модуль косинусу замінюємо на його розклад в ряд Фур'є з кількістю доданків, які забезпечують відносну похибку апроксимації на інтервалі інтегрування не більше 0,5%)

$$\Phi_2(t) = H_z\left|\cos(pt)\right| \approx H_z\left(\frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}\cos(2pt) - \frac{4}{15\pi}\cos(4pt) + \frac{4}{35\pi}\cos(6pt) - \frac{4}{63\pi}\cos(8pt) + \right.$$

$$+\frac{4}{99\pi}\cos(10pt)-\frac{4}{143\pi}\cos(12pt)+\frac{4}{195\pi}\cos(14pt)-\frac{4}{255\pi}\cos(16pt)\Bigg),$$

і введені позначення $\nu=\frac{B_{11}^{2z}}{gN_1}$, $\omega_1=\sqrt{\frac{gN_1}{\beta_{11}^{q}}}$ – власна частота першої антисиметричної форми a_1.

Область дійсних характеристичних чисел рівняння (3) співпадає з областю розв'язків, які необмежено зростають. З іншого боку, область комплексних характеристичних чисел відповідає обмеженим (майже періодичним) рішенням. Границям, які розділяють області дійсних та комплексних коренів, відповідають кратні корені, які мають значення 1 або -1. У випадку значення 1 характеристичного кореня рішення диференціального рівняння буде періодичним з періодом $T=\frac{2\pi}{\omega_1}$, а у випадку значення −1 воно буде мати період 2*T*.

Таким чином, області необмежено зростаючих розв'язків відокремлюються від областей стійкості періодичними рішеннями з періодом *T*або 2*T*. А саме, два розв'язки одного періоду обмежують область нестійкості, два розв'язки різних періодів – область стійкості. Строге доведення цієї теореми наведено у [3]. З наведеної теореми випливає, що визначення границь областей нестійкості може бути зведено до пошуку умов, при яких диференціальне рівняння (3) має періодичні розв'язки з періодами*T*або 2*T*.

Оскільки існування періодичних розв'язків і можливість їх розкладу у ряд Фур'є є фактом відомим, будемо шукати періодичне рішення у вигляді

$$a_1=B_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k\cos\frac{kpt}{2}+A_k\sin\frac{kpt}{2}\right),\qquad(7)$$

де парним значенням k = 2,4,6,…відповідають періодичні рішення періоду*T*, а непарним k = 1,3,5,…− періодичні рішення періоду 2*T*, причому номерk, яким ми обмежуємося у розкладі (7), означає номер області відповідного параметричного резонансу (зони нестійкості).

Для пошуку границь областей динамічної стійкості та нестійкості з непарними номерами (k = 1,3) шукаємо періодичне рішення періоду 2*T* у вигляді

$$a_1=B_1\cos\frac{pt}{2}+A_1\sin\frac{pt}{2}+B_3\cos\frac{3pt}{2}+A_3\sin\frac{3pt}{2},$$

підставляємо у рівняння (3) та застосуємо метод Гальоркіна: помножуємо рівняння (3) по черзі на всі координатні функції та інтегруємо за періодом 2*T*. В результаті отримуємо дві відокремлені системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно значень амплітудA_1, A_3таB_1, B_3, кожна з яких, як відомо з лінійної алгебри, має відмінні від нуля розв'язки тільки у випадку, коли детермінант, складений із коефіцієнтів цієї системи, дорівнює нулю.Прирівнюючи кожен з детермінантів нулю, отримуємо два алгебраїчних рівняння четвертого ступеня, корені яких будуть рівняннями кривих, які розділяють першу та третю області стійкості та нестійкості в площині параметрів (p, H_z). Розв'язки цих рівнянь для випадку класичної задачі

Фарадея дають рівняння границь області першого резонансу (після розкладу в ряд Тейлора по параметру H_z)

$$p = 2\omega_1 - 2\nu\omega_1^3 H_z + \frac{7}{2}\nu^2\omega_1^5 H_z^2 - \frac{51}{8}\nu^3\omega_1^7 H_z^3 + \frac{197}{16}\nu^4\omega_1^9 H_z^4 - \frac{1563}{64}\nu^5\omega_1^{11} H_z^5,$$

$$p = 2\omega_1 + 2\nu\omega_1^3 H_z + \frac{7}{2}\nu^2\omega_1^5 H_z^2 + \frac{51}{8}\nu^3\omega_1^7 H_z^3 + \frac{197}{16}\nu^4\omega_1^9 H_z^4 + \frac{1563}{64}\nu^5\omega_1^{11} H_z^5,$$

та області третього резонансу

$$p = \frac{2}{3}\omega_1 - \frac{1}{54}\nu^2\omega_1^5 H_z^2 - \frac{1}{216}\nu^3\omega_1^7 H_z^3 + \frac{1}{1296}\nu^4\omega_1^9 H_z^4 + \frac{5}{5184}\nu^5\omega_1^{11} H_z^5,$$

$$p = \frac{2}{3}\omega_1 - \frac{1}{54}\nu^2\omega_1^5 H_z^2 + \frac{1}{216}\nu^3\omega_1^7 H_z^3 + \frac{1}{1296}\nu^4\omega_1^9 H_z^4 - \frac{5}{5184}\nu^5\omega_1^{11} H_z^5.$$

Для узагальнення задачі Фарадея під дією збурення $\Phi_2(t)$ області нестійкості для першого та третього параметричного резонансу вироджуються – перетворюються на криві лінії, оскільки дві системи алгебраїчних рівнянь для амплітудA_1, A_3таB_1, B_3співпадають і дають тільки одне рівняння: для першого резонансу

$$p = 2\omega_1 + \frac{128}{9\pi^2}\nu^2\omega_1^5 H_z^2 + \frac{10240}{81\pi^4}\nu^4\omega_1^9 H_z^4 + \frac{327680}{243\pi^6}\nu^6\omega_1^{13} H_z^6,$$

для третього резонансу

$$p = \frac{2}{3}\omega_1 - \frac{128}{243\pi^2}\nu^2\omega_1^5 H_z^2 + \frac{10240}{6561\pi^4}\nu^4\omega_1^9 H_z^4 - \frac{10158080}{1594323\pi^6}\nu^6\omega_1^{13} H_z^6.$$

Для пошуку границь областей динамічної стійкості та нестійкості з парним номером (k = 2,4) шукаємо періодичне рішення періоду Tу вигляді

$$a_1 = B_0 + B_2\cos pt + A_2\sin pt + A_4\sin 2pt,$$

підставляємо у рівняння (3) та застосуємо метод Гальоркіна: помножуємо рівняння (3) по черзі на всі координатні функції та інтегруємо за періодом T. В результаті отримуємо дві відокремлені системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно значень амплітудA_2, A_4таB_0, B_2, кожна з яких має відмінні від нуля розв'язки тільки у випадку, коли детермінант, складений із коефіцієнтів цієї системи, дорівнює нулю. Прирівнюючи кожен з детермінантів нулю, отримуємо два алгебраїчних рівняння четвертого ступеня, корені яких будуть рівняннями кривих, які розділяють другу та четверту області стійкості та нестійкості в площині параметрів (p, H_z). Розв'язки цих рівнянь для випадку класичної задачі Фарадея дають рівняння границь області другого резонансу (після розкладу в ряд Тейлора по параметру H_z)

$$p = \omega_1 + \frac{1}{24}\nu^2\omega_1^5 H_z^2 + \frac{5}{3456}\nu^4\omega_1^9 H_z^4 + \frac{25}{248832}\nu^6\omega_1^{13} H_z^6,$$

$$p = \omega_1 - \frac{1}{4}\nu^2\omega_1^5 H_z^2 + \frac{7}{32}\nu^4\omega_1^9 H_z^4 - \frac{33}{128}\nu^6\omega_1^{13} H_z^6,$$

та області четвертого резонансу

$$p=\frac{1}{2}\omega_1-\frac{1}{192}\nu^2\omega_1^5H_z^2+\frac{25}{110592}\nu^4\omega_1^9H_z^4-\frac{445}{31850496}\nu^6\omega_1^{13}H_z^6,$$

$$p=\frac{1}{2}\omega_1-\frac{\sqrt{2}}{4}\nu\omega_1^3H_z+\frac{5\sqrt{2}}{32}\nu^3\omega_1^7H_z^3-\frac{21\sqrt{2}}{128}\nu^5\omega_1^{11}H_z^5,$$

а для задачі Фарадея під дією збурення $\Phi_2(t)$ рівняння границь області другого резонансу мають вигляд

$$p=\omega_1-\frac{4}{3\pi}\nu\omega_1^3H_z+\frac{8}{3\pi^2}\nu^2\omega_1^5H_z^2-\frac{160}{27\pi^3}\nu^3\omega_1^7H_z^3+\frac{1120}{81\pi^4}\nu^4\omega_1^9H_z^4-\frac{896}{27\pi^5}\nu^5\omega_1^{11}H_z^5,$$

$$p=\omega_1+\frac{4}{3\pi}\nu\omega_1^3H_z+\frac{8}{3\pi^2}\nu^2\omega_1^5H_z^2+\frac{160}{27\pi^3}\nu^3\omega_1^7H_z^3+\frac{1120}{81\pi^4}\nu^4\omega_1^9H_z^4+\frac{896}{27\pi^5}\nu^5\omega_1^{11}H_z^5,$$

а рівняння границь області четвертого резонансу мають вигляд

$$p=\frac{1}{2}\omega_1-\frac{2}{15\pi}\nu\omega_1^3H_z+\frac{4}{75\pi^2}\nu^2\omega_1^5H_z^2-\frac{16}{675\pi^3}\nu^3\omega_1^7H_z^3+\frac{112}{10125\pi^4}\nu^4\omega_1^9H_z^4,$$

$$p=\frac{1}{2}\omega_1+\frac{2}{15\pi}\nu\omega_1^3H_z-\frac{38}{225\pi^2}\nu^2\omega_1^5H_z^2-\frac{184}{675\pi^3}\nu^3\omega_1^7H_z^3+\frac{812}{10125\pi^4}\nu^4\omega_1^9H_z^4,$$

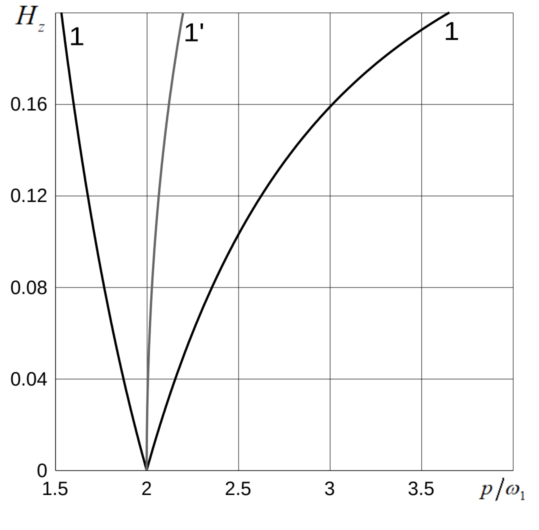

Рис. 1 Перша областьпараметричного резонансу (між двома кривими з однаковим номером; 1 – класична задача Фарадея, 1’ – узагальнена задача Фарадея при збуренні $\Phi_2(t)$)

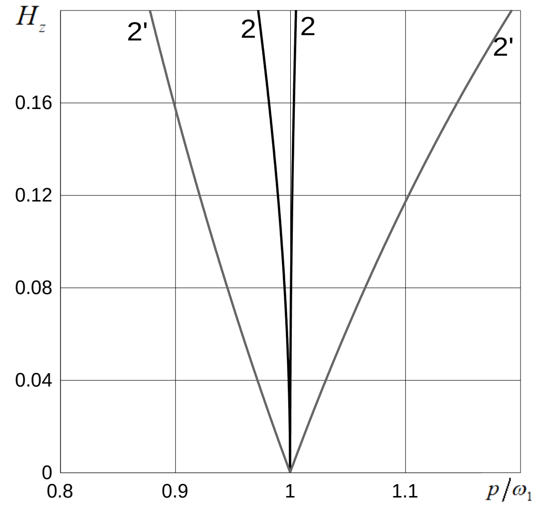

Рис. 2Друга областьпараметричного резонансу (між двома кривими з однаковим номером; 2 – класична задача Фарадея, 2’ – узагальнена задача Фарадея при збуренні $\Phi_2(t)$)

На Рис. 1 та 2 побудованообласті стійкості та нестійкості відповідно в околі першого та другого резонансу в площині параметрів «частота - амплітуда» зовнішнього вертикального кінематичного збурення. Область нестійкості обмежені кривими з однаковими номерами. Як було показано вище, для узагальнення задачі Фарадея під дією збурення $\Phi_2(t)$ області нестійкості для першого та третього параметричного резонансу (і для всіх інших областей з непарними номерами) вироджуються –

перетворюються на криві (крива 1' на Рис. 1). Причиною даного ефекту є відсутність гармонік з непарними частотами у кінематичному збуренні $\Phi_2(t)$. Ця ж особливість функції $\Phi_2(t)$ призводить до збільшення області нестійкості з парним номером (друга, четверта і т.д.) у порівнянні з класичним випадком (рис. 2).

3. Результати обчислювальних експериментів.

Розглядається круговий циліндричний резервуар з вертикальною поздовжньою віссю Oz, який здійснює поступальні рухи в площині xOy. Резервуар радіусу R = 1 м та маси M_T частково заповнений водою з масою M_F до глибини $H=R$.

Система рівнянь (1) – (2) лінійна відносно других похідних, що дає можливість при практичній реалізації на кожному кроці чисельного інтегрування спочатку перетворити систему за допомогою ЕОМ до нормальної форми Коші, а потім чисельно інтегрувати за часом за допомогою стандартного методу Рунге–Кутта. При цьому на етапі перетворення до нормальної форми Коші порядок похідних знижувався шляхом введення узагальнених швидкостей $\dot{a}_i$ як рівноправних незалежних змінних (разом зa_i).

При дослідженні динаміки системи резервуар – рідина в розкладах утримувалося $n_1 = n_2 = 12$ координатних функцій по лінійній і квадратичній теорії та $n_3 = 6$ координатних функційпо кубічній теорії. Координатні функції розміщено в порядку зростання відповідних їм власних частот за винятком ψ_6 – другої осесиметричної форми.

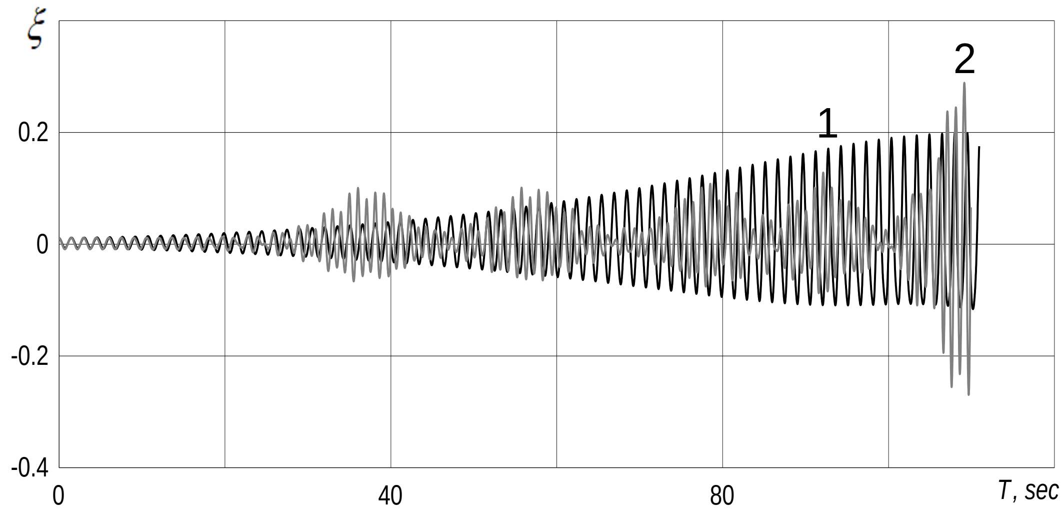

Рис. 3 Зміна у часі амплітуди коливань вільної поверхні рідини в околі другого параметричного резонансу (1 – класична задача Фарадея, 2 – узагальнена задача Фарадея при збуренні $\Phi_2(t)$)

При збуренні системи в околі першого резонансу в класичній задачі Фарадея спостерігається поступове збільшення амплітуди коливань вільної поверхні рідинина стінці резервуару з характерною амплітудною модуляцією [2]. В узагальненій задачі, навпаки, при дії на систему збурення з аналогічними параметрами виходу в режим параметричного резонансу не відбувається. Причиною цьому є «виродження» області в криву – для того, щоб задовольнити умовам виходу системи в резонанс, необхідно здійснити налагодження параметрів з нескінченною точністю, що неможливо.

Для виходу системи у режим параметричного резонансу в околі другого резонансу необхідно у порівнянні з першим резонансом суттєво збільшити амплітуду зовнішнього збурення. На Рис. 3 наведено графіки зміни у часі амплітуди коливань вільної поверхні рідини для двох розглянутих випадків (1 – класична задача Фарадея, 2 – узагальнена задача Фарадея). Як і у випадку першого резонансу, у класичній задачі відбувається набір амплітуди з чітко вираженою амплітудною модуляцією. У випадку узагальненої задачі наявність багаточастотного спектру у зовнішньому збуренні призводить до більш швидкого виходу на режим параметричного резонансу і з більш високими амплітудами. Для графіку амплітуди також характерна наявність зрізів та зламів, що є ознакою суттєвого впливу вищих форм коливань.

Висновки. Розглянуто узагальнення класичної задачі Фарадея про параметричний резонанс вільної поверхні при вертикальних коливаннях резервуару. Узагальнюється задача Фарадея про умови та особливості розвитку параметричного резонансу в системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли резервуар рухається вертикально за періодичним законом модуль косинуса. На основі рівняння Хілла побудовано області стійкості та нестійкості, які порівнюються з аналогічними результатами для класичної задачі Фарадея. Поведінка системи розглядається на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі, яка описує сумісний рух резервуару та рідини під впливом зовнішніх силового збудження або кінематичного збурення. Показано, що на відміну від класичного випадку області параметричного резонансу з непарними номерами відсутні – вони вироджуються у криві лінії. Для областей з парними номерами, навпаки, характерно збільшення ширини області нестійкості, амплітуди коливань вільної поверхні рідини та впливу вищих форм коливань.

Література

1. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем.–М.: ГИТТЛ, 1956. –600 с.
2. *Константінов О.В., Лимарченко О.С.* Вихід на параметричний резонанс в узагальненій задачі Фарадея про рух резервуара з рідиною // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – вип. 17. – С. 73-80.
3. *Лимарченко О.С., Ясинский В.В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ «КПИ», 1997. – 338 с.
4. *Стретт М.Д.* Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. – ДНТВУ, 1935. – 400 с.
5. *Benjamin T.B., Ursell F.* The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. – Proc. R. Soc. Lond. A. – 1954. – **225** (1163), P. 505–515.
6. *Faraday M.* On the forms and states assumed by fluids in contact vibrating elastic surfaces // Phil. Trans. of the Royal Society of London. – 1831. – **121**. – P. 319-346.
7. *Mathieu E.* Memoire sur le movement vibratoire d’une membrane de forme elliptique // J. Math. Pures Appli. – 1868. – 13. – P. 137–203.

Generalization of the Faraday problem for the mechanical system «reservoir – liquid» in the presence of a vertical periodic (inharmonic) disturbance

Oleksandr Konstantinov

The generalization of Faraday's classic problem about the parametric resonance of the free surface during vertical oscillations of the tank according to the periodic law of the modulus of the cosine is considered. Regions of stability and instability are designed, which are compared with similar results for the classical Faraday problem. The behavior of the system is considered on the basis of a nonlinear multimode model, which describes the combined movement of the tank and fluid under the influence of external force excitation or kinematic disturbance. It is shown that, in contrast to the classical case, there is no parametric resonance in the resonance regions with odd numbers.For regions with even numbers, on the contrary, it is characterized by an increase in the width of the region of instability, the amplitude of oscillations of the free surface of the liquid and the influence of higher forms of oscillations.

Keywords: moving tank, liquid with a free surface, Faraday's problem, parametric oscillations, parametric resonance, regions of stability.

Отримано 26.08.2023.