УДК 532.595

DOI 10.15407/fmmit2023.38.011

Характер силової взаємодії ідеальної рідини з вільною поверхнею в резервуарі у формі еліпсоїда обертання

Олег Лимарченко[1], Олександр Кліменков[2], Катерина Семенович[3]

[1]Проф., д.т.н., Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Україна, Київ, проспект академіка Глушкова, 4-е, e-mail: olelim@knu.ua
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Україна, Київ, проспект академіка Глушкова, 4-е,e-mail: alikklimenkov@gmail.com
[3]К.ф.-м.н., Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, Україна, Київ, проспект академіка Глушкова, 4-е, e-mail: kateryna.semenovych@knu.ua

Розглянуто задачу про вимушені нелінійні сумісні коливання резервуара у формі еліпсоїда обертання і об'єму ідеальної рідиною з вільною поверхнею. Математична модель задачі будується на основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського з використанням підходів нелінійної механіки і методу Канторовича. В підсумку це дозволило одержати нелінійну динамічну модель системи у формі звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітуд збурення форм коливань рідини і параметрів поступального руху резервуару. Для різних частот збудження руху системи в околі першого резонансу визначено характеристики силової взаємодії рідини з резервуаром в залежності від нахилів стінок резервуара в околі вільної поверхні і ступенів заповнення резервуара рідиною. Встановлено, що в певній мірі залежності зміни силових характеристик збігаються зі змінами амплітуд збурень вільної поверхні рідини.

Ключові слова:ідеальна рідина, вільна поверхня, резервуар еліпсоїдальної форми, сумісні коливання, аналіз силової взаємодії рідини зі стінками резервуара.

Вступ. Задачі динаміки резервуарів з рідиною з вільною поверхнею є неодмінною складовою багатьох енергетичних і транспортних систем. Лінійна теорія дає відповіді на широке коло питань щодо поведінки таких систем при малих збуреннях руху рідини. Проте постійне ускладнення умов експлуатації таких систем і потреби в моделюванні позаштатних і аварійних режимів висувають нові вимоги до побудови математичних моделей систем «резервуар – рідина». Перехід до задач, коли резервуари мають форму, що відрізняється від циліндричної, вимагає перегляду засобів опису нелінійних ефектів і, особливо, поведінки рідини в околі контуру трифазного контакту «резервуар – рідина – повітря». Це викликано тим, що рідина в збуреному русі має відслідковувати бічну стінку над початково незбуреною вільною поверхнею рідини, яка в лінійній постановці задачі взагалі не входить до граничних умов. Крім того, переважна більшість задач динаміки конструкцій з рідиною відповідає випадкам, коли відносна маса рідини є високою, що призводить до необхідності розгляду задачі динаміки конструкції з рідиною в сумісній постановці. В свою чергу це призводить до ускладнення протікання динамічних процесів через зміни величин власних частот, а інколи і черговості їхнього розташування у порівнянні з випадком заданого руху резервуара. Через високу чутливість поведінки системи до зміни частот в околі резонансу нехтування фактору сумісності руху може призводити до принципово некоректних результатів. Окремою проблемою, яка пов'язана з задачами керування і способів обмеження руху таких систем, є визначення характеру силової взаємодії рідини із стінками резервуара. При використанні варіаційного методу формулювання задачі силовий відгук рідини (головний вектор сил тиску рідини на стінки резервуара) визначається автоматично без потреби визначення поля тисків з наступним інтегруванням по стінках резервуара. Виходячи з цього в цій роботі ставиться задача на основі розвинених математичних моделей, орієнтованих на дослідження нелінійних задач динаміки сумісного руху рідини в резервуарах нециліндричної форми, дослідити характеристики силової взаємодії рідини з стінками резервуара для різних діапазонів частот сили збудження системи і для різних нахилів стінок і рівнів заповнення резервуарів. Ці результати проілюстровані для випадку резервуара у формі еліпсоїда обертання.

1. Формулювання задачі.

Розглянемо задачу про рух системи «абсолютно тверда конструкція–рідина з вільною поверхнею». Конструкція здійснює поступальний рух під дією активних зовнішніх сил. Вважаємо рідину ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Для числових прикладів у статті розглянуто еліпсоїдальні резервуари обертання. Розв'язок задачі будується за методом [2, 4], який пройшов багатобічну апробацію для задач динаміки рідини з вільною поверхнею в резервуарах у формі тіл обертання (конічний, сферичний, гіперболоїдальний, параболічний, еліпсоїдальний) при силовому збудженні руху і порівняння з якісними результатами теоретичних робіт і експериментів [1, 3, 4].

Математична модель для рідини описується диференціальними рівняннями в частинних похідних, а рух конструкції – системою звичайних диференціальних рівнянь, що являє собою об'єкт неоднорідної математичної структури. Постановка задачі здійснюється на основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0\,,\ L = T - \Pi\,;\ L = \frac{1}{2}\rho\int_{\tau}(\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2}M_r(\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - \frac{1}{2}\rho g\int_{S_0}\xi^2 dS - (M_r + M_f)\varepsilon_z g. \quad (1)$$

Тут T і Π кінетична і потенціальна енергія системи.Для безвихрового руху ідеальної рідини швидкість її руху $\vec{v}$ визначається через потенціал швидкості φ за формулою $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$, де $\varphi = \varphi_0 + \dot{\vec{\varepsilon}}\cdot\vec{r}$, причому φ_0 відповідає хвильовому руху рідини, а $\dot{\vec{\varepsilon}}\cdot\vec{r}$ – потенціал швидкості руху рідини, обумовлений сумісним рухом рідини і резервуара, тут $\dot{\vec{\varepsilon}}$ –поступальна швидкість руху резервуара, $\vec{r}$ – радіус–вектор довільної точки рідини, M_r і M_f маса резервуара і рідини. Розв'язання нелінійної крайової задачіруху рідини з вільною поверхнею в порожнині нециліндричної форми при розв'язанні має деякі складності, пов'язані з тим, що в загальному випадку на відміну від циліндричного резервуару плоска (горизонтальна) незбурена вільна поверхня не є координатною поверхнею. До того у випадку порожнин нециліндричної форми область визначення форми збуреної поверхні змінюється у часі і не співпадає з незбуреною вільною поверхнею. Тому для порожнин нециліндричної форми для опису руху рідини аналогічно роботі [2] вводиться недекартова параметризація області, яку займає рідина τ, $\alpha = \frac{r}{f(z)}$; $\beta = \frac{z}{H}$.Тут $r = f(z)$ – рівняння твірної порожнини, задане в циліндричній системі координат, H – глибина порожнини, а $z = 0$ співпадає з незбуреною вільною поверхнею рідини S_0. В параметрах α, θ, β, що вводяться замість циліндричної системи координат (θ – кутова координата циліндричної системи), область τ, яку займає рідина, набуває циліндричної форми ($\alpha \in [0,1]; \theta \in [0, 2\pi]$ і в незбуреному стані $\beta \in [-1, 0]$). Тому через циліндричність області τ у новій параметризації в збуреному стані рівняння вільної поверхні рідини можна представити у розв'язаному вигляді відносно координати β і в нерозв'язаному відносно zв старій системі параметрів

$$\beta = \frac{1}{H}\xi(\alpha, \theta, t) \quad \text{або} \quad \eta(r, \theta, z, t) = \frac{z}{H} - \frac{1}{H}\xi\left(\frac{r}{f(z)}, \theta, t\right) = 0 \qquad (2)$$

Позначимо змочену поверхню резервуара через Σ, а через S – збурену вільну поверхню рідини. Представлення рівняння вільної поверхні у вигляді (2) дозволяє ефективно застосувати метод збурень і метод Канторовича для побудови нелінійної скінченовимірної моделі динаміки резервуару з рідиною.

Згідно з вимогами варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського (1) варіації змінних мають задовольняти всім кінематичним обмеженням задачі, а саме
а) $\Delta\varphi = 0$ в області τ, яку займає рідина у збуреному русі, що є наслідком рівнянь нерозривності для руху рідини;

б) $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ на границі контакту рідини з стінками Σ, або в новій параметризації

$\frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - f'\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = 0$, що є умовою неперетікання через тверді границі;

в) $\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2}\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} - \frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}$ –кінематична гранична умова на збуреній вільній поверхні рідини S,що є вимогою співпадіння руху в напрямку нормалі частинок рідини і вільної поверхні рідини.

Кінематичні граничні умови задачі про коливання рідини з вільною поверхнею у рухомому резервуарі мають подвійне значення, оскільки вони практично збігаються з умовами розв'язуваності крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа. За своїм змістом ці умови відповідають вимогам збереження об'єму рідини в її збуреному русі. Умова розв'язуваності задачі прийме форму

$$\int_{\Sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial n}ds + \int_{\Delta\Sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial n}ds + \int_{S}\frac{\partial \varphi}{\partial n}ds = 0,$$

(3)

Тут $\Delta\Sigma$ є продовженням бічної поверхні резервуара над вільною поверхнею, куди можуть досягати гребні хвиль. Наявність доданка на $\Delta\Sigma$ обумовлена нелінійністю формулювання задачі. Шляхом перетворень можна показати, що $\int_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds = \int_{S_0} \frac{\partial\xi}{\partial t} ds$.

Згідно з методами аналітичної механіки варіації змінних на різних поверхнях і в об'ємі мають бути незалежними, тому кожен з доданків (3) має бути нульовим. Тоді перша умова розв'язуваності крайової задачі збігається з умовою неперетікання на змочуваній поверхні, третя умова за змістом є умовою збереження об'єму рідини у її збуреному русі. Друга умова є наслідком нелінійної постановки задачі,а саме що рідина у збуреному русі буде підніматися вище рівня незбуреної вільної поверхні.

Відомо, що задача про визначення частот і форм коливань рідини має вигляд

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0; \; \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_0} = \lambda\varphi. \tag{4}$$

Якщо рідина має відслідковувати стінку над вільною поверхнею, то вона має задовільняти умові неперетікання над вільною поверхнею на деякій поверхні $\Delta\Sigma$, куди можуть досягати гребні хвиль. В постановці (4) ця умова є суперечливою як фізично, так і з точки зору математичної структури задачі. Це протиріччя долається шляхом збільшення області рідини на додатковий об'єм $\Delta\tau$, що відповідає $\Delta\Sigma$, з наступним розглядом розв'язку для справжнього об'ємуτ (докладно цей метод допоміжної області описано в [2]). Зазвичай в моделях інших авторів цією вимогою нехтують. За своїм характером метод є наближеним, але він враховує аналітичну природу розв'язку задач про вільні коливання рідини і їх сингулярні властивості. Успішність методу в основному визначається тим, що контур із сингулярними властивостями фактично переноситься від рівня, який відповідає незбуреному положенню вільної поверхні рідини, на рівень вище $\Delta\Sigma$, куди рідина вже взагалі не досягає. За змістом таке винесення сингулярних точок за межі області рідини є типовим в інших задачах механіки ідеальної рідини.

Згідно з варіаційним принципом Гамільтона–Остроградського розв'язки задачі мають наперед задовольняти всім кінематичним обмеженням. До таких обмежень відносяться рівняння нерозривності, умови розв'язуваності задачі (3) і кінематичні граничні умови на стінках і вільній поверхні рідини. Приймемо такі представлення шуканих змінних

$$\xi = \bar{\xi}(t) + \sum_i a_i \bar{\psi}_i(\alpha) T_i(\theta)\,; \varphi_0 = \sum_i b_i \psi_i(\alpha,\beta) T_i(\theta)\,, \quad \bar{\psi}_i(\alpha) = \frac{\partial\psi_i}{\partial z}\bigg|_{\beta=0} = \left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta} - \frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha}\right)\bigg|_{\beta=0}$$

.Тут позначено $\bar{\xi}(t)$ – функція корекції зміни об'єму рідини, викликана нециліндричністю області τ у збуреному русі системи, $\bar{\psi}_i(\alpha)$ – форма коливань вільної поверхні рідини, визначена на основі методу допоміжної області, в якій,оскільки резервуар є тілом обертання, відокремлена кутова змінна$T_i(\theta)$; $\psi_i(\alpha,\beta)T_i(\theta)$ – потенціал швидкостей рідини, визначений за методом допоміжної області, $a_i(t)$ і $b_i(t)$– амплітудизбурення i-ї форми коливань вільної поверхні рідини і потенціалу швидкостей.

Далі за методом [2] (використовуються методи Гальоркіна і нелінійної механіки) визначається залежність $\bar{\xi}(t)$ і $b_i(t)$ через параметри $a_i(t)$, що відповідає теоремі: безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини повністю визначається рухом її границь. Ця процедура фактично є виключенням нелінійних в'язей закону збереження об'єму рідини у збуреному русі і кінематичної граничної умови на вільній поверхні.

$$\bar{\xi}_1 = 0;\ \ \bar{\xi}_2 = -\frac{e_2}{e_1}\sum_{i,j} a_i a_j \beta^{\nu}_{ij};\ \ \bar{\xi}_3 = -\frac{e_3}{e_1}\sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \gamma^{\nu}_{ijk};\ \ \bar{\xi}_4 = -\frac{e_4}{e_1}\sum_{i,j,k,l} a_i a_j a_k a_l \delta^{\nu}_{ijkl}\,. \quad (5)$$

$$b_p^{(1)} = \dot{a}_p;\ \ b_p^{(2)} = \sum_{i,j}\dot{a}_i a_j \gamma^{o}_{ijp};\ \ b_p^{(3)} = \sum_{i,j,k}\dot{a}_i a_j a_k \delta^{o}_{ijkp};\ \ b_p^{(4)} = \sum_{i,j,k,l}\dot{a}_i a_j a_k a_l h^{o}_{ijklp}\,.$$

(6)

Тепер система параметрів a_k і ε_j відповідає кількості ступенів вільності системи в рамках прийнятої моделі і за кількістю змінних є мінімальною. В цих параметрах функція Лагранжа (1) буде відповідати не континуальній, а дискретній системі, для якої рівняння Лагранжа 2-го роду мають вигляд

$$\sum_i \ddot{a}_i\left\{V^1_{ir} + \sum_j a_j V^2_{irj} + \sum_{j,k} a_j a_k V^3_{irjk}\right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}}\cdot\left\{\vec{U}^1_r + \sum_i a_i \vec{U}^2_{ri} + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{U}^3_{rij} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{U}^4_{rijk}\right\} =$$

$$= \sum_{i,j}\dot{a}_i\dot{a}_j V^{2*}_{ijr} + \sum_{i,j,k}\dot{a}_i\dot{a}_j a_k V^{3*}_{ijkr} + + \dot{\vec{\varepsilon}}\cdot\left\{\sum_i \dot{a}_i \vec{U}^{2*}_{ir} + \sum_{i,j}\dot{a}_i a_j \vec{U}^{3*}_{ijr} + \sum_{i,j,k}\dot{a}_i a_j a_k \vec{U}^{4*}_{ijkr}\right\} -$$

$$-g\left\{\sum_i a_i W^2_{ir} + \frac{3}{2}\sum_{i,j} a_i a_j W^3_{ijr} + 2\sum_{i,j,k} a_i a_j a_k W^4_{ijkr}\right\},\quad r = 1, 2, \ldots N \ (7)$$

$$\frac{\rho}{(M_r + M_f)}\left\{\sum_i \ddot{a}_i\left[\vec{U}^1_i + \sum_j a_j \vec{U}^2_{ij} + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{U}^3_{ijk}\right]\right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} =$$

$$= \frac{\vec{F}}{(M_r + M_f)} - g\vec{z}_0 - \frac{\rho}{(M_r + M_f)}\sum_{i,j}\dot{a}_i\dot{a}_j\left\{\vec{U}^2_{ir} + 2\sum_k a_k \vec{U}^3_{ijk}\right\}. \ (8)$$

Приведена система *N+3* рівнянь (*N* – кількість форм коливань вільної поверхні рідини, які беруться до уваги в моделі) – нелінійна дискретна модель динаміки рухомого резервуара з рідиною, що частково заповнює його. Для побудови цієї системи індексні коефіцієнти обчислюються як квадратури від координатних функцій ψ_i та $\bar{\psi}_i$ (їх значення приведені в [1, 2]).

Використовуючи принцип Д'аламбера з рівняння руху резервуара можна в аналітичній формі визначити силовий відгук рідини (головний вектор сил тиску рідини на стінки резервуара). Переважно таку силову характеристику визначають шляхом визначення тиску і інтегруванням тиску по поверхні стінок резервуара, що є набагато складніше.

$$\vec{R} = -\rho \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{U}_i^1 + \sum_j a_j \vec{U}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{U}_{ijk}^3 \right] - \rho \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \left\{ \vec{U}_{ir}^2 + 2\sum_k a_k \vec{U}_{ijk}^3 \right\}. \quad (9)$$

Силовий відгук рідини (динамічна реакція) є проявом сил інерції і згідно математичної моделі системи вона обчислюється з точністю до кубів амплітуд збурення форм коливань вільної поверхні рідини.

2. Аналіз силової взаємодії резервуара з рідиною

Для аналізу закономірностей формування силового відгуку рідини розглянемо випадок руху резервуару у формі еліпсоїда обертання, маса якого $M_r = 0,2M_f$. В такому випадку вплив рухомості рідини на рух резервуару є суттєвим. Розглянуто три випадки еліпсоїдальних резервуарів з півосями a і b: випадок $a=1,\ b=2$ відповідає розтягненому по вертикалі еліпсоїду; випадок $a=1,\ b=1$ відповідає сферичному резервуару, а випадок $a=2,\ b=1$ відповідає стисненому по вертикалі еліпсоїду. Для кожного резервуара розглядається три варіанта заповнення рідиною до глибини $H=0,5b$; $H=0,75b$; $H=b$. Резервуар здійснює рух в горизонтальній площині із стану спокою під дією сили $F_x = A(M_r + M_f)\cos\omega t$ (A – множник, який для різних режимів підбирався так, щоб система виходила на режим нелінійних коливань, коли збурення на вільній поверхні мають порядок 0,2 від радіусу вільної поверхні рідини). Аналізувалися такі випадки зміни частот $\omega = 0,5\omega_c$; $\omega = 0,9\omega_c$; $\omega = 0,98\omega_c$; $\omega = \omega_c$; $\omega = 1,02\omega_c$; $\omega = 1,1\omega_c$; $\omega = 1,5\omega_c$, де ω_c – частота сумісних коливань системи резервуар–рідина за першою формою.

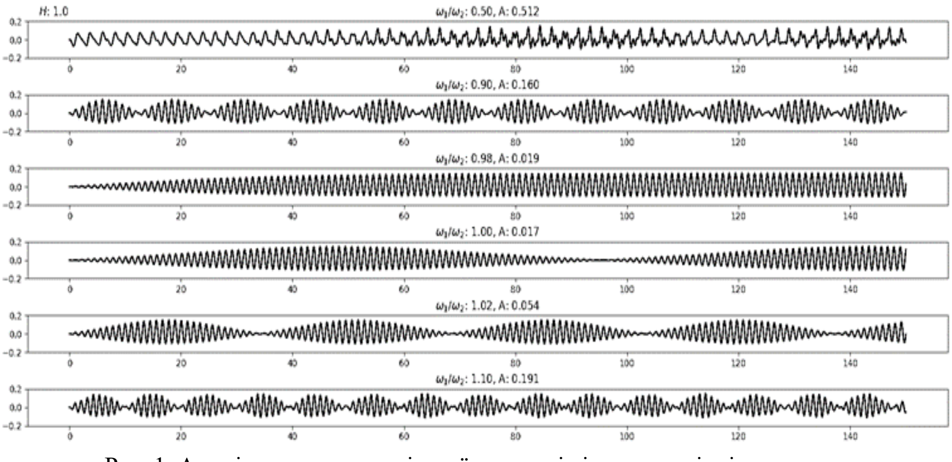

Рис. 1. Амплітуди коливань вільної поверхні рідини на стінці резервуара

На рис. 1представлені результати розрахунків зміни в часі збурень вільної поверхні рідини на бічній поверхні резервуара в площині *zOx*, в якій відбуваються коливання для випадку еліпсоїда обертання з півосями $a=1,\ b=2$ (розтягнений по вертикалі еліпсоїд) заповнення $H=b$. На всіх рисунках зліва вгорі приведено глибину заповнення, згори в центрі – значення відносної частоти і амплітудного параметра збудження коливань системи. Звернемо увагу на те, що для частот суттєво менших за резонансну коливання вільної поверхні значно відрізняються від синусоїдального закону і спостерігається дрейф середнього значення. При наближенні до резонансної частоти спостерігається висока чутливість системи до амплітуди збудження і навіть до зміни частоти на декілька процентів. В характері розвинення коливань суттєво проявляється модуляція, при цьому частота зміни кривої модуляції спочатку зменшується і є найменшою для відносної частоти 0,98, а потім знову наростає. Це свідчить про те, що нелінійності в такій системі є м'якого типу. Відмітимо також, що для відносних частот 0,9 і 1,1 частота модуляції практично співпадає, що передбачається теоретичними міркуваннями для слабко нелінійних багаточастотних систем.

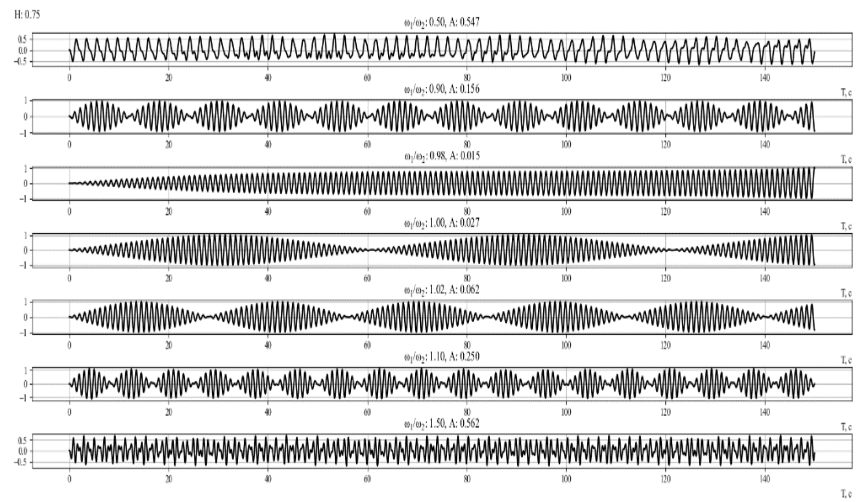

Рис. 2. Силовий відгук для розтягненого по вертикалі еліпсоїда

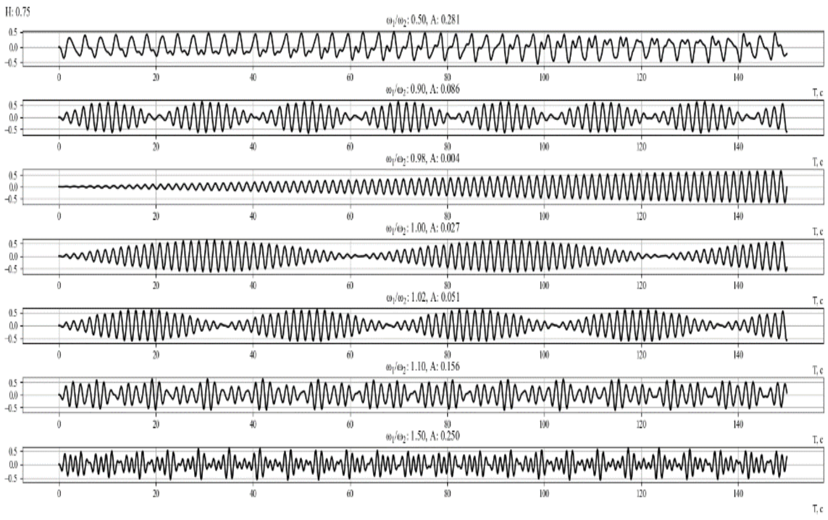

Рис. 3. Силовий відгук для стисненого по вертикалі еліпсоїда

На рис. 2 і 3 представлено залежності в часі силового відгуку рідини для випадку $a=1,\ b=2$ (розтягнутий по вертикалі еліпсоїд) і $a=2,\ b=1$ (стиснений по вертикалі еліпсоїд) для глибин заповнення $H=0,75b$. Як видно з графіків загальна картина зміни силового відгуку в залежності від відносної частоти незначно відрізняється від характеру зміни відхилень вільної поверхні рідини. В той же час помітним є те, що у випадку розтягненого по вертикалі резервуара на високих частотах помітний прояв відхилення коливань силового відгуку від впорядкованого (регулярного) закону зиіни. Це обумовлене тим, що розтягнутий по вертикалі резервуар накладає більше обмежень на рухомість рідини (більша висота стінок і їх кутовий нахил). Відповідно для менших обмежень руху рідини многовид рухів розширюється.

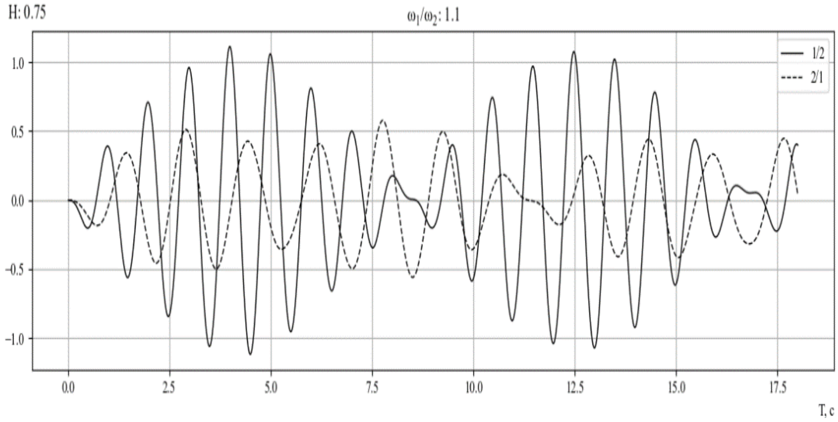

Рис. 4. Порівняння силових відгуків для розтягненого і стисненого по вертикалі еліпсоїдів

При аналізі кількісної зміни силового відгуку рідини з врахуванням відносних до маси рідини показників (кількість рідини для цих задач є різною) стає помітним (рис. 4, приведено варіант $\omega=1{,}1\omega_c$, на рисунку результати для розтягненого по вертикалі еліпсоїду подано суцільною лінією, а для стисненого – пунктирною), що абсолютні значення силового відгуку рідини у випадку розтягненого по вертикалі еліпсоїда є більшими ніж у випадку стисненого по вертикалі еліпсоїда. Це можна пояснити двома факторами. По-перше, для розтягненого по вертикалі еліпсоїда частоти вільних сумісних коливань рідини і резервуара є більшими ніж у випадку стиснего по вертикалі випадку. Це обумовлене як тим, що радіус незбуреної вільної поверхні для стисненого по вертикалі еліпсоїда вдвічи переважає радіус вільної поверхні рілини для розтягненого еліпсоїда. До того ж нахил стінок у випадку стисненого по вертикалі еліпсоїда є меншим ніж у випадку розтягнутого по вертикалі еліпсоїда. Збільшення частоти є свідченням того, що геометрична форма резервуару для розтягнутого по вертикалі еліпсоїда як в'язь накладає більше обмежень ніж у випадку стисненого по вертикалі еліпсоїда. По-друге, мобільність рідини у випадку стисненого по вертикалі еліпсоїда є більшою, що дозволяє рідині із запізненням залучатися до руху при зміні руху тіла-носія. В разі розтягненого по вертикалі резервуара лише верхні шари рідини залучаються в активний хвильовий рух, а в донній частині спостерігається зонастагнації, що призводить до більшого прояву інерції рідини, а значить і сил взаємодії між рідиною і стінками резервуару.

Висновки. Аналітичними засобами побудовано математичну модель руху резервуара нециліндричної форми і рідини, що частково його заповнює. В рамках нелінійної моделі сумісного руху складових системи досліджено характер розвинення динамічних процесів при гармонічному силовому збудженні руху для частот в околі основного резонансу (від половинної до збільшеної в півтора рази). Для випадку резервуара у формі еліпсоїда обертання (розтягнутий і стиснений по вертикалі варіанти) досліджено характер зміни силової взаємодії рідини і резервуара для різних частот силового збудження руху системи. Встановлено, що у випадку зміни форми еліпсоїда збільшення розміру вільної поверхні і відхилення кута нахилу стінок резервуара від вертикального напрямку в околі вільної поверхні призводить до зменшення силового відгуку рідини на стінки резервуара.

Література

1. *Limarchenko O.S., Matarazzo G.* Rotational motion of structures with tanks partially filled with liquid, – FADA Ltd. Kiev, 2003. – 286 p.
2. *Limarchenko O.S.* Specific features of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of a liquid with free surface in cavities of noncylindrical shape // Ukrainian Mathematical Journal. – 2007. – **59**, 1. – P. 45-69.
3. *Konstantinov A.V., Limarchenko O.S., Lukyanchuk V.V., Nefedov A.A.* Dynamic methods of damping the oscillation in structure–free-surface fluid system, Int. Appl. Mech., 2019. – **55,** N 1. – P. 58-67.
4. *Klimenkov O.L., Konstantinov A.V., Limarchenko O.S.* Dynamic methods of damping the oscillation in structure–free-surface fluid system //International Applied Mechanics. – 2023. – **59**, 3, P. 324-335,

Character of force interaction of an ideal liquid with a free surface in the ellipsoidal reservoir of revolution

Oleg Limarchenko, Oleksandr Klimenkov, Katerina Semenovich

Theproblemofforcednonlinearcombinedmotionofthereservoirofellipsoidalrevolutionandavolumeofidealliquidwithafreesurfaceisunderconsideration. Mathematical model of the problem is constructed based on the Hamilton–Ostrogradsky variational principle with using approaches of nonlinear mechanics and the Kantorovich method. Finally, this enables the construction of nonlinear dynamic model of the system in the form of a system of ordinary differential equations relative to amplitudes of excitations of normal modes of oscillation of a liquid and parameters of translational motion of the reservoir. For different disturbance frequencies of the system motion in a vicinity of the first resonance we determined characteristics of the force interaction of a liquid with the reservoir depending on inclination of reservoir walls and degrees of filling the reservoir by a liquid. It was ascertained that to certain extent dependencies of variation of force characteristics coincide with variations of elevations of a liquid free surface.

Keywords: idealliquid, freesurface, reservoir of ellipsoid of revolution, combined oscillations, analysis of force interaction of a liquid with reservoir walls.

Отримано 23.08.22.