УДК 518.25

doi.org/10.15407/fmmit2023.37.027

Збіжність розвинень у ланцюгові дроби розв'язків матричних поліноміальних рівнянь

Микола Недашковський

доктор фізико-математичних наук, професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, m.nedashkovskyy@gmail.com

В даній роботі пропонується підхід для матричних рівнянь, який дозволяє суттєво уточнити умови, при яких обчислювальні схеми будуть збіжними. Одержано перетворення для одноперіодичних матричних гіллястих ланцюгових дробів в матричні ланцюгові дроби із блочними елементами. Це дає нові достатні ознаки збіжності до розв'язку ітераційних методів для поліноміальних матричних рівнянь n-го порядку

Ключові слова: матричні рівняння, критерії збіжності наближених методів до розв'язку, періодичні матричні ланцюгові дроби.

Вступ. Для багатьох класів поліноміальних матричних півнянь[2] вдається подати їх розв'язки нескінченими матричними ланцюговими дробами **(МЛД)** [4], а наближені значення одержати обчисленням певної кількості поверхів дробу. Якщо ввести, наприклад, до розгляду матричне поліноміальне рівняння 2-го порядку

$$XAX + X + B = 0 \tag{1}$$

де $A, B \in \mathrm{R}^{p\times p}$ – квадратні ненульові матриці, а $X \in \mathrm{R}^{p\times p}$ – невідома матриця, то після еквівалентних перетворень для розв'язку одержується наступне розвинення в одноперіодичний МЛД

$$X = -\cfrac{E}{E - \cfrac{E}{E - \ddots} \cdot BA} \cdot B. \tag{2}$$

Для рівняння виду

$$AX^2 + BX + C = 0, \tag{3}$$

де A, B, C та $X \in \mathrm{R}^{p\times p}$, розв'язок матиме таке розвинення в МЛД

$$X = -\cfrac{E}{B - A \cdot \cfrac{E}{B - \ddots} \cdot C} \cdot C, \tag{5}$$

Розв'язок симетричного квадратного рівняння 2-го порядку неканонічного вигляду

$$AX + XB + XFX + C = 0 \tag{6}$$

де A, B, C, F та X є матрицями розміру $p \times p$, подається періодичним МЛД

$$X = -F^{-1}B + \frac{E}{A - F^{-1}B + \cfrac{E}{A - F^{-1}B + \ddots} \cdot (AF^{-1}B - C)F} \cdot (AF^{-1}B - C) \tag{7}$$

А для дискретного рівняння Ріккаті вигляду

$$A^T XA - X - A^T XB(R + B^T XB)^{-1} B^T XA + Q = 0, \tag{8}$$

де $A, B, C, R, Q \in \mathrm{R}^{p\times p}$ розв'язок $X \in \mathrm{R}^{p\times p}$ записується двоперідичним МЛД

$$X = Q + A^T \cdot \frac{E}{A^{-1}BR^{-1}B^T + A^{-1} \cfrac{E}{Q + A^T \cdot \cfrac{E}{A^{-1}BR^{-1}B^T + \ddots}}} \tag{9}$$

Розв'язок матричного поліноміального рівняння $n-$го порядку

$$\sum_{i=0}^{n} A_i X^i = 0 \tag{10}$$

може бути поданий одноперіодичним гіллястим МЛД

$$X = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} P_k \cdot \frac{E}{P_0 - Q_k + \sum\limits_{k=1}^{n-1} P_k \cdot \cfrac{E}{P_0 - Q_k + \ddots}} \tag{11}$$

де $P_k \in \mathrm{R}^{m\times m} (k = 0,1,...n-1)$ та $Q_k \in \mathrm{R}^{m\times m} (k = 1, 2,...n-1)$ – квадратні матриці. Їх значення є розв'язками системи лінійних алгебраїчних рівнянь [4], складених із коефіцієнтів рівняння (10).

Для матричного поліноміального рівняння n -го порядку неканонічного вигляду

$$X^n + X^{n-1}A_{n-1} + X^{n-2}A_{n-2} + ... + XA_1 + A_0 = 0 \tag{12}$$

де матриці $A_i \in \mathrm{R}^{p\times p}$ $(i = 0,1,\ldots, n-1)$, $X \in R^{p\times q}$, а $n \geq 2$ – ціле число, розв'язок має розвинення в одноперіодичний гіллястий МЛД

$$X = P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{E}{P_0 - Q_k + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \cfrac{E}{P_0 - Q_k + \ddots} \cdot P_k} \cdot P_k \tag{13}$$

де $P_0 \in R^{m\times m}$ та $Q_k \in R^{m\times m} (k = 1, 2,..., n-1)$ – квадратні матриці з ми елементами, значення яких є розв'язками системи лінійних алгебраїчних рівнянь, складених із коефіцієнтів рівняння.

1. Критерії збіжності

Звичайно ж для оцінки збіжності наведених МЛД можна застосовувати достатні ознаки [3], одержані раніше для гіллястих МЛД загального вигляду

$$\sum_{k_1=1}^{n} A_{k_{(1)}} \frac{E}{B_{k_{(1)}} + \sum\limits_{k_2=1}^{n} A_{k_{(2)}} \dfrac{E}{B_{k_{(2)}} + \ddots} C_{k_{(2)}}} C_{k_{(1)}} \tag{14}$$

Тут X – банаховий простір квадратних матриць порядку $p \times p$ над полем коплексних чисел, $k_{(i)} = k_1 k_2 ... k_i$ – позначення для мультиіндексів, $A_{k_{(i)}}, B_{k_{(i)}}, C_{k_{(i)}} \in$ X – квадратні невироджені матриці розміру $p \times p$.

Теорема 1 *Якщо для* $\|X\| \in (0, \sum\limits_{k_1=1}^{n} \|A_{k_1}\| \|C_{k_{(s+1)}}\|]$ *існує, причому лише один розв'язок поліноміального матричного рівняння, то розвинення за ітераційною процедурою у МГЛД (13) з елементами, що задовольняють умовам*

$$\left\| B_{k_{(s)}}^{-1} \right\| \le \frac{1}{1 + \sum\limits_{k_{s+1}=1}^{n} \left\| A_{k_{(s+1)}} \right\| \left\| C_{k_{(s+1)}} \right\|} \quad (s = 1, 2, 3...). \tag{16}$$

збігається до цього розв'язкую.

Ця ознака є матричним аналогом відомої теореми Прінгсгейма [5],[6] для звичайних ГЛД [1] загального вигляду. Але, як показують числові експерименти, реальні діапазони збіжності ітераційних процедур суттєво ширші. Цілком природнім є бажання уточнити цю достаню ознаку на більш вузькому класі періодичних ГЛД. Інформації про дослідження збіжності ГЛД практично немає. Тому цей аспект теорії розглядати не будемо, а зупинимося на збіжності періодичних МЛД.

Нехай X – банахова алгебра квадратних матриць порядку $p \times p$ над полем C . Розлянемо одноперіодичний МЛД

$$E + A \cdot \frac{E}{E + A \cdot \dfrac{E}{E + A \cdot \dfrac{E}{E + \ddots} \cdot C} \cdot C} \cdot C \tag{17}$$

.

Теорема 2 *Якщо для МЛД (17) існує таке додатне число* a*, що виконується умова*

$$\|A\| \|C\| < a \tag{18}$$

то цей дріб є абсолютно збіжним.

Введемо тепер до розгляду матричний одноперіодичний гіллястий дріб

$$B_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \frac{E}{B_k + \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \frac{E}{B_k + \ddots} \cdot C_k} \cdot C_k \tag{19}$$

Тут $A_i, B_i, C_i \in \mathrm{X}$ – квадратні невироджені $p \times p$ матриці. Надалі будемо вважати $A_1, A_2, \cdots, A_n$ відмінними від нуля .

Теорема 3. *Якщо для одноперіодичного гіллястого МЛД (19) виконується умова*

$$\det\left(D_{k,\infty}\right) \neq 0, \quad (i = 1, 2, ...; \quad k = 1, 2, ..., n), \tag{20}$$

то існує еквівалентний йому одноперіодичний матричний ланцюговий лріб

$$\begin{gathered} B_0 + (A_1 \quad A_2 \quad ... \quad A_n) \cdot (E \cdot B_0 + diag(B_k) + (A_1 \quad A_2 \quad ... \quad A_n) \times \\ \times (E \cdot B_0 + diag(B_k) + ...)^{-1} \begin{pmatrix} C_1 \\ ... \\ C_n \end{pmatrix})^{-1} \begin{pmatrix} C_1 \\ ... \\ C_n \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{21}$$

Теорема 4 *Якщо для деякого поліноміального матричного рівняння на інтервалі* $\|X\| \in (0, \|(A_1, A_2, \dots, A_n)\| \|(C_1, C_2, \dots, C_n)\|)$ *існує, причому лише один розв'язок, то розвинення за ітераційною процедурою) у МГЛД з елементами, такими що*

$$\begin{gathered} \left\|(E \cdot B_0 + diag(B_1, B_2, \dots, B_n))^{-1}\right\| \leq \\ \leq \frac{1}{1 + \|(A_1, A_2, \dots, A_n)\| \|(C_1, C_2, \dots, C_n)\|} \quad (s = 1, 2, \dots). \end{gathered} \tag{22}$$

збігається до цього розв'язку

Виявляється, що часто замість двоперіодичних дробів можна використовувати рекурентні співвідношення, які дозволяюь подати роз'язки одноперідичними МЛД. Так для двоперіодичного МЛД, що одержується дробово-лінійнимо перетворенням

$$s = s(w) = \frac{E}{B_1 + \frac{E}{B_2 + w} \cdot A_2} \cdot A_1 \tag{23}$$

отримано еквівалентний закон композиції

$$s(w) = B_1^{-1} A_1 - \frac{E}{A_2 + B_2 B_1 + w B_1} \cdot A_2 B_1^{-1} A_1 \tag{24}$$

Цей результат суттєво полегшує аналіз збіжності ітераційних процесів, які одержуються в результаті застосування дробово-лінійних перетворень виду (23) і дають розвинення у двоперіодичні матричні неперервні дроби.

Приклад. За допомогою пакета MatLab проводилися розрахунки за формулами $X = B_0 + (B_1 + (B_2 + X)^{-1} A_2)^{-1} A_1$ та $X = B_0 + B_1^{-1} A_1 - (A_2 + B_2 B_1 + X B_1)^{-1} A_2 B_1^{-1} A_1$ із матричними коефіцієнтами $A_i \ (i = 1, 2),\ B_i \ (i = 0, 1, 2)$.

В результаті обчисленнь $X_0 = 0$ в обох випадках одержано однакові значення підхідних дробів $2i$ –го та i –го порядків відповідно та остаточне значення X_k .

Висновки. Наведені теоретичні дослідження і числові експерименти підтверджують, що з викорстанням теорії періодичних ЛД вдається суттєво послабити як умови збіжності МЛД в цілому, так і уточнити критерії збіжності до розв’язку ітераційних схем для матричних рівнянь побудованих на їх основі.

Література

[1] Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби.-К.: Наукова думка,1986.-176 с.
[2] Х.Д.Икрамов – Численное решение матричных уравнений.-М:Наука,1984.-192 с.
[3] Недашковський М.О. Ознаки збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів. Математичні методи та фізико-механічні поля. Львів, 2003, том 46, №4, с.50-56.
[4] Dorożyński, J., Nedashkovskyy, M. Computer methods for calculating tuple solutions of polynomial matrix equations, 2020 Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences 68(2), pp. 235-243.
[5] L.Lorentzen, H.Waadeland. Continued fractions with applications. Amsterdam: Elsevier Publishers B.V.,1992 - 606 p.
[6] Wall H.S. – Analytic theory of continued fractions. - N. Y., 1948, 433 p.

CONVERGENCE OF EXPANSIONS INTO CONTINUED FRACTIONS OF SOLUTIONS OF MATRIX POLYNOMIAL EQUATIONS

Mykola Nedashkovskyy

In this work, an approach for matrix equations is proposed, which allows to significantly clarify the conditions under which computational schemes will converge. The transformation for one-periodic matrix branched continued fractions into matrix continued fractions with block elements is obtained. This gives new sufficient signs of convergence to the solution of iterative methods for polynomial matrix equations of the nth order.

Отримано 15.03.23