УДК 519.6

doi.org/10.15407/fmmit2023.36.143

Метод відновлення внутрішньої структури 3D тіла на основі використання систем трьох рентгенівських знімків та томограм

Олег О. Литвин[1], Олександра Литвин[2], Євгенія Хурдей[3].

[1] д. ф.-м. н., професор, Українська інженерно-педагогічна академія, вул. Університетська, 16, 61003, Харків, e-mail: olegolitvin55@gmail.com

[3] к. ф.-м. н., професор, Харківський національний університет радіоелектроніки, пр. Науки,14, 61166, Харків, e-mail: litvinog@ukr.net

[3] асистент, Українська інженерно-педагогічна академія, вул. Університетська, 16, 61003, Харків, e-mail: evgesha.hurdei@gmail.com

Дана стаття присвячена подальшому узагальненню методів малоракурсної томографії, які використовують нові інформаційні оператори. В ній пропонується та досліджується метод відновлення коефіцієнта поглинання 3D тіла за допомогою проникаючого опромінення у трьох взаємно-перпендикулярних напрямках та трьох систем томограм у площинах, перпендикулярних цим напрямкам. Для моделювання досліджується детальніше сплайн-інтерфлетація функцій трьох змінних, в якій базисні функції є сплайнами першого степення. Не втрачаючи загальності, вважається, що досліджуваний об'єкт розташовано в одиничному кубі, ребра якого паралельні відповідним осям координат. Формулюються та доводяться теореми про апроксимативні властивості побудованих операторів, які наближують коефіцієнт поглинання. Зокрема, доведена теорема про залишок наближення.

Ключові слова: *томограма, тіньове зображення, коефіцієнт поглинання, інтерфлетація функцій*

Вступ. Більш ніж сто років тому Й. Радон опублікував статтю про можливість представлення функцій багатьох змінних за допомогою інтегралів від слідів цих функцій на системі прямих і площин. Лише у 1979 році А. Кормаку та Г. Хаунсфілду була присуджена Нобелівська премія за створення рентгенівського комп'ютерного томографа. З того часу комп'ютерна томографія належить до високоточних напрямів діагностування в медицині, на митниці тощо. Зокрема, з'явились магнітно-резонансні томографи, оптичні томографи тощо. Важливу роль відіграє напрям малоракурсної комп'ютерної томографії. Відмітимо метод відновлення внутрішньої структури тривімірного тіла, розроблений в статті [1] (дивись також патент [2]). який для побудови математичної моделі використовує всього два або три тіньові зображення об'єкта (рентгенівскі знімки) у взаємно перпендикулярних напрямках. Тобто цей метод відноситься до ультрамалоракурсної комп'ютерної томографії. Отже, актуальною є розробка та дослідження методів, пов'язаних з малоракурсною томографією з використанням нових інформаційних операторів.

В даній роботі в якості нових інформаційних операторів пропонується використовувати оператори інтерфлетації функцій трьох змінних з використанням системи томограм на площинах, перпендикулярних осям координат. Побудовані оператори наближення одночасно використовують і тіньові зображення, і систему томограм. Проведено побудову наближуючих операторів, а також досліджено залишковий член наближення коефіцієнта поглинання з допомогою цих операторів.

1. Постановка задачі

Вважаємо, що функція $f(x,y,z)$ описує коефіцієнт поглинання проникаючого опромінення тіла, розташованого в одиничному кубі $[0,1]^3$. Для невідомої досліджуваної функції вважаємо заданими оператори I_1, I_2, I_3:

$$I_1 f(y,z) = \int_0^1 f(x,y,z)dx,\ I_2 f(x,z) = \int_0^1 f(x,y,z)dy,\ I_3 f(x,y) = \int_0^1 f(x,y,z)dz.$$

Ці оператори будемо вважати математичними моделями тіньових зображень (знімків) досліджуваного об'єкта в напрямках осей координат.

У площинах $x = x_p,\ p = \overline{1, m-1};\ y = y_q, q = \overline{1, n-1}; z = z_r, r = \overline{1, s-1}$

задані зображення коефіцієнта поглинання, тобто томограми, які поступають з комп'ютерного томографа: $f(x_p, y, z), f(x, y_q, z), f(x, y, z_r)$.

З допомогою цих томограм побудуємо ператори F_1, F_2, F_3

$$F_1 f(x,y,z) = \sum_{p=1}^{m-1} h_{m,p}(x) \cdot f(x_p, y, z)\,,$$

$$F_2 f(x,y,z) = \sum_{q=1}^{n-1} h_{n,q}(y) \cdot f(x, y_q, z),$$

$$F_3 f(x,y,z) = \sum_{r=1}^{s-1} h_{s,r}(z) \cdot f(x, y, z_r)\,,$$

де $h_{m,p}(x), h_{n,q}(y), h_{s,r}(z)$ є сплайнами першого степеня з властивостями

$$h_{m,p}(x_{p'}) = \delta_{p,p'},\ h_{n,q}(y_{q'}) = \delta_{q,q'},\ h_{s,r}(z_{r'}) = \delta_{r,r'}\,;$$

$$p' = \overline{1, m-1};\ q' = \overline{1, n-1};\ r' = \overline{1, s-1}\,.$$

Покладемо

$$h(t) = \begin{cases} 1 - |t|, \ |t| \le 1, \\ 0, \ |t| \ge 1; \end{cases} \quad x_p = \frac{p}{m}, y_q = \frac{q}{n}, z_r = \frac{r}{s};$$

$$h_{m,p}(x) = h(mx - p), h_{n,q}(y) = h(ny - q), h_{s,r}(z) = h(sz - r)\,.$$

Оператори F_1, F_2, F_3 є операторами інтерфлетації з властивостями:

$F_1 f(x_{p'}, y, z) = f(x_{p'}, y, z), p' = \overline{1, m-1};$

$F_2 f(x, y_{q'}, z) = f(x, y_{q'}, z), q' = \overline{1, n-1};$

$F_3 f(x, y, z_{r'}) = f(x, y, z_{r'}), r' = \overline{1, s-1}.$

Задача полягає в побудові та дослідженні оператора O, що використовує введені вище оператори $I_1, I_2, I_3, F_1, F_2, F_3$, і має задані тіньові зображення в напрямках осей координат та одночасно томограми в площинах, перпендикулярних осям кординат. Дослідити апроксимативні властивості побудованого оператора O та порівняити його з віповідними операторами, дослідженими в роботах [1,2].

2. Метод розв'язання

Введемо оператори O_1, O_2, O_3:

$$O_1 f(x, y, z) = \alpha F_1 f(x, y, z) + (\beta I_1 f(y, z) - \alpha I_1 F_1 f(y, z)) \frac{w_m(x)}{I_1 w_m(x)},$$

$$O_2 f(x, y, z) = \alpha F_2 f(x, y, z) + (\beta I_2 f(x, z) - \alpha I_2 F_2 f(x, z)) \frac{w_n(y)}{I_2 w_n(y)},$$

$$O_3 f(x, y, z) = \alpha F_3 f(x, y, z) + (\beta I_3 f(x, y) - \alpha I_3 F_3 f(x, y)) \frac{w_s(z)}{I_3 w_s(z)},$$

де $\alpha, \beta \in \{0,1\}, 1 \le \alpha + \beta \le 2$.

Тут $w_m(x)$ - сплайн першого степеня з властивостями:

$w_m(x_p) = 0, p = \overline{1, m-1}; I_1 w_m(x) \neq 0$.

$w_m(x_p) = \left| x - x_p \right|, x_p - \frac{1}{2m} \le x \le x_p + \frac{1}{2m}, p = \overline{1, m-1}; I_1 w_m(x) = (m-1) \cdot \frac{1}{2m}.$

Аналогічні формули можна записати для $w_n(y), w_s(z)$.

Оператор O визначимо формулою

$$Of(x, y, z) = \left(O_1 + O_2 + O_3 - O_1 O_2 - O_1 O_3 - O_2 O_3 + O_1 O_2 O_3\right) f(x, y, z).$$

Якщо $\alpha = 0, \beta = 1$, то отримаємо оператори O_1, O_2, O_3, які досліджувались в роботах [1,2]. Якщо $\alpha = 1, \beta = 0, m = n = s = 3$, то отримаємо оператор наближеного відновлення коефіцієнта поглинання $f(x, y, z)$ з використанням інтерфлетації на шести гранях паралелепіпеда. Цей випадок розглядався в роботі [1]. Далі розглядаємо випадок $\alpha=1, \beta=1$.

Теорема 1. Якщо $\alpha=1, \beta=1$, то оператор $O_1 f(x,y,z)$ має такі властивості:

1. $I_1 O_1 f(y,z) = I_1 f(y,z)$;
2. $O_1(f(x_{p'},y,z)) = f(x_{p'},y,z),\ p'=\overline{1,m-1}$.

Доведення.

1. $I_1(O_1 f(x,y,z)) =$

$$= \int_0^1 O_1 f(x,y,z)dx = \int_0^1 (F_1 f(x,y,z) + (I_1 f(y,z) - I_1 F_1 f(y,z))\frac{w_m(x)}{I_1 w_m(x)})dx =$$

$$= \int_0^1 F_1 f(x,y,z)dx + (I_1 f(y,z) - I_1 F_1 f(y,z))\int_0^1 \frac{w_m(x)}{I_1 w_m(x)}dx = I_1 f(y,z);$$

2. $O_1(f(x_{p'},y,z)) = F_1 f(x_{p'},y,z) + (I_1 f(y,z) - I_1 F_1 f(y,z))\dfrac{w_m(x_{p'})}{I_1 w_m(x)} =$

$$= \left| w_m(x_{p'}) = 0 \right| = F_1 f(x_{p'},y,z) = f(x_{p'},y,z),\ p'=\overline{1,m-1}.$$

Теорему 1 доведено.

Аналогічно доводиться, що

$$I_2 O_2 f(x,z) = I_2 f(x,z),\ O_2(f(x,y_{q'},z)) = f(x,y_{q'},z), q'=\overline{1,n-1};$$

$$I_3 O_3 f(x,y) = I_3 f(x,y),\ O_3(f(x,y,z_{r'})) = f(x,y,z_{r'}), r'=\overline{1,s-1}.$$

Таким чином, оператори O_1, O_2, O_3 при застосуванні до наближуваної функції $f(x,y,z)$ породжують функції трьох змінних з тими самими інтегралами I_1, I_2, I_3 та з тими самими слідами (томограмами) на системі $m-1, n-1, s-1$ площин, перпендикулярних відповідним ребрам одиничного кубу. Це означає, що мають місце тотожності:

$$O_1 O_1 f(x,y,z) \equiv O_1 f(x,y,z),\ O_2 O_2 f(x,y,z) \equiv O_2 f(x,y,z),$$

$$O_3 O_3 f(x,y,z) \equiv O_3 f(x,y,z).$$

Теорема 2. Оператори O_1, O_2 переставні, тобто $O_1 O_2 f(x,y,z) = O_2 O_1 f(x,y,z)$.

Теорема 3. Оператор O має таку властивість:

$O_1 O f(x,y,z) = O_1 f(x,y,z)$.

Доведення.

$$O_1 O f(x,y,z) = O_1\left(O_1 + O_2 + O_3 - O_1 O_2 - O_1 O_3 - O_2 O_3 + O_1 O_2 O_3\right) f(x,y,z) =$$

$$= \left(O_1 + O_1 O_2 + O_1 O_3 - O_1 O_2 - O_1 O_3 - O_1 O_2 O_3 + O_1 O_2 O_3\right) f(x,y,z) = O_1 f(x,y,z).$$

Теорему 3 доведено.

Введемо позначення:

$$R_i f(x,y,z) = f(x,y,z) - O_i f(x,y,z) = (E - O_i) f(x,y,z),\ i = \overline{1,3}.$$

Тут E тотожній оператор.

Теорема 4. Для залишку

$$Rf(x,y,z) = f(x,y,z) - Of(x,y,z) = (E - O) f(x,y,z)$$

справедлива формула

$$Rf(x,y,z) = R_1 R_2 R_3 f(x,y,z) .$$

Висновки. Узагальнено метод побудови операторів наближення функцій трьох змінних за допомогою тіньових зображень, наведений у роботі [1] на випадок, коли експериментальні дані включають також $m-1, n-1, s-1$ томограм на площинах, перпендикулярних трьом осям координат. Досліджено апроксмативні властивості побудованих операторів. Зокрема, доведено, що залишок наближення функцій трьох змінних $f(x,y,z)$ функцією $Of(x,y,z)$ дорівнює операторному добутку трьох залишків наближення цієї функції функціями $O_1 f(x,y,z), O_2 f(x,y,z), O_3 f(x,y,z)$ відповідно.

Література

[1] *Сергієнко І.В., Литвин О.О.* Математичне моделювання внутрішньої структури 3D тіла на основі трьох рентгенівських знімків у трьох взаємно-перпендикулярних ракурсах. Доповіді НАН України, № 7, 2008. – С. 53-59.

[2] *Сергієнко І.В., Литвин О.М., Литвин О.О.* Спосіб відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта. Патент на винахід № 78569. Зареєстровано в державному реєстрі патентів України на винаходи 10.04.2007.

The method of restoring the internal structure of the 3D body based on the use of systems of three X-ray images and tomograms

Oleg O. Lytvyn, Oleksandra Lytvyn, Yevheniia Khurdei

This article is devoted to the further generalization of low-angle tomography methods used by new information operators. It proposes and investigates a method of restoring the absorption coefficient of a 3D body using penetrating irradiation in three mutually perpendicular directions and three systems of tomograms in planes perpendicular to these directions. For modeling, the spline interflatation of functions of three variables, in which the basis functions are splines of the first power, is studied in more detail.Without losing generality, it is assumed that the investigated object is located in a unit cube, the edges of which are parallel to the corresponding coordinate axes. Theorems about the approximate properties of constructed operators that approximate the absorption coefficient are formulated and proved. In particular, the theorem on the remainder of the approximation is proved.

Отримано 14.03.23