

Зображення ширококугових взаємних функцій двох змінних у малокувильовій (вейвлет) областіАдріан Наконечний¹, Роман Мусій², Ростислав Наконечний³

¹д. т. н., професор, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: admakon@gmail.com

²д. ф.-м. н., професор, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: musij@lp.edu.ua

³к. т. н., доцент, Національний університет „Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013,
e-mail: rostyk.ws@gmail.com

Сформульовано основні вимоги, які ставляться до ширококугових сигналів. Відзначено, що властивості роздільної здатності вейвлет перетворення залишаються постійними при зміні сигналів протягом багатьох октав і дають можливість реалізувати обробку сигналів в широкому діапазоні частот. Показано, що ширококугову взаємну функцію двох змінних (ШВФДЗ) можна розглядати, при виконанні відповідних математичних вимог, як дійсне малокувильове перетворення, яке представляє подібність між одним сигналом і багатьма можливими модифікованими версіями іншого сигналу. Проведено аналіз ШВФДЗ залежно від порядку проведення операцій масштабування і зміщення. Запропоновано для аналізу ширококугових систем використовувати взаємні ШВФДЗ, які дозволяють отримати ефективну обробку функцій двох змінних і одночасно краще відображати характеристики сигналів для їх подальшого розпізнавання та дослідження. Встановлено, що оскільки окремі малокувильові перетворення враховують нестационарні короткотривалі (перехідні) характеристики сигналів, то у випадку використання взаємних ШВФДЗ виникає можливість їх застосування для оцінки просторових нестационарних систем.

Ключові слова. швидке перетворення Фур'є, неперервне вейвлет перетворення, дискретне вейвлет перетворення, вузькосмугова взаємна функція двох змінних, ширококугова взаємна функція двох змінних.

Вступ. Відомо, що перетворення, які здійснюються в біомедицині, синтезі та розпізнаванні мови, геофізиці, океанографії, системах зондування та інших акустично чутливих системах вимагають ширококугової, багатооктавної сигнальної обробки. Часто середовища, в яких знаходяться давачі сигналів, або навіть сама конструкція сенсорних давачів передбачають певну нестационарність. Використання кореляційної або когерентної обробки цих сигналів протягом інтервалів спостереження дозволяє суттєво покращити коефіцієнт передачі всієї системи обробки сигналів. Однак тривалі інтервали спостереження, з іншого боку, приводять також до нестационарності або часозмінного спектра в сигналах, що спостерігаються.

Встановлено, що роздільна здатність вузькосмугових сигналів, для аналізу яких використовують перетворення Фур'є, змінюється вздовж багатьох октав. Виходячи з цього з допомогою такого перетворення не можливо здійснювати якісну оцінку і дійсне порівняння ширококугових сигналів. Ширококугові і (або) нестационарні сигнали широко досліджувалися протягом десятків років, однак вони не

використовувалися в практичних розробках. Це зумовлено тим, що кожна обробка, яка містила ширококутні сигнали, вимагала великого обсягу обчислень. При цьому часто приймалися некоректні припущення, а також непрацездатні алгоритми та структури обробки. З іншої сторони властивості роздільної здатності малокутнього, вейвлет перетворення залишаються постійними при зміні сигналів протягом багатьох октав [4,9], а тому дають можливість реалізувати оцінку і порівняння характеристик сигналів в широкому діапазоні частот. Така Q-стала властивість малокутнього перетворення досягається за рахунок зміни розміру часо-частотного вікна та фіксації кількості циклів в аналізуючому “ядрі”. Виходячи з цього, в багатьох працях [1,2,9] відзначається доцільність використання малокутнього перетворення для оброблення ширококутних сигналів. Однак при цьому наголошується, що на даний час цей напрям недостатньо використовується і реалізований на практиці. З огляду на це в даній роботі пропонується розглянути деякі прикладні аспекти оброблення ширококутних сигналів, зокрема ширококутних взаємних функціональних залежностей сигналів двох змінних.

1. Аналіз вимог до ширококутних сигналів

В процесі аналізу та оброблення ширококутних сигналів існує проблема забезпечення необхідної (можливо постійної) роздільної здатності в широкому діапазоні частот.

З теорії малокутнього, вейвлет перетворення відомо, що таке перетворення забезпечує пропорційну роздільну здатність в кожній частотній смузі. В міру збільшення центральної частоти зростає ширина смуги. Одночасно пропорційно змінюється роздільна здатність за часом; на високих частотах (малі масштаби) масштабована базова малокутня функція сильно стискається і тим самим забезпечує добру роздільну здатність за часом.

У випадку коли, у малокутніх перетвореннях використовується базова малокутня функція Морлета (тоноподібна функція), то такі перетворення дають можливість враховувати різкі зміни, які мають високочастотні компоненти сигналу. Для них роздільна здатність за часом стає низькою однак роздільна здатність за частотою – високою. У випадку аналізу низькочастотних компонент сигналу при малокутньому перетворенні формуються вікна довшої тривалості тобто з більшою часовою роздільною здатністю, але низькою роздільною здатністю за частотою. Така комбінація роздільних здатностей за часом і частотою, які відображають властивості малокутніх перетворень дозволяє створювати Q-сталі, або вікна зі сталими фрактальними роздільними здатностями ширини смуг. Необхідно відзначити, що базові малокутні функції є також ширококутними, оскільки вони, крім здатності змінювати частоти в широкому частотному діапазоні, мають також низькочастотні складові.

Відомо, що добуток роздільних здатностей за часом і частотою визначається нерівністю Гайзенберга і залишається практично сталим протягом аналізу всієї смуги частот вхідних сигналів [9]. Таким чином, обробка для такої постійної роздільної здатності перетворення має однакові властивості (Q-сталий аналіз) упродовж багатьох смуг проведення операцій. Така властивість не справджується для

перетворення Фур'є, яке має однакову ширину смуги навколо кожної центральної частоти і не може виконувати Q-сталий аналіз протягом всієї ширини смуги сигналу.

В процесі дослідження функцій двох змінних є важливим також дослідження роздільної здатності масштаб-зміщення, яка повинна бути аналогічною визначенню роздільної здатності в часо-частотному плані для вузькосмугових сигналів. Якісні характеристики малохвильового перетворення в просторі масштаб-зміщення найлегше інтерпретувати через якісні характеристики широкосмугової функції двох змінних. Таке представлення забезпечує можливість тісного зв'язку з дослідженням вузькосмугових функцій, які близько пов'язані з будь-яким апаратом часо-частотного аналізу [2] і можливим застосуванням малохвильового перетворення.

Таким чином, так як малохвильовий аналіз дозволяє ефективно здійснювати широкосмугову обробку, то саме на його основі доцільно аналізувати широкосмугові сигнали і системи. Як з теоретичної, так і з практичної точки зору доцільно подавати широкосмугову обробку на основі малохвильової теорії, а також описувати інтерпретацію малохвильової теорії на основі концепції широкосмугової обробки. Такі взаємозв'язки поєднують малохвильову теорію з широкосмуговими структурами обробки, які мають широке прикладне застосування. Широкасмугові нестаціонарні сигнали зустрічаються в багатьох прикладних задачах. Однак їх аналіз проводився до недавнього часу переважно у вигляді певних обмежень, які накладалися на вузькосмугові сигнали. З огляду на це врахування широкосмугових нестаціонарних особливостей в процесі моделювання (з використанням малохвильової теорії) дозволяє отримати суттєві переваги при розв'язанні низки прикладних задач.

Прикладні задачі, розв'язки яких використовують переваги широкосмугової обробки, повинні задовольняти певним "широкасмуговим вимогам". З огляду на це перед розглядом кожної широкосмугової функції двох змінних необхідно проводити перевірку на виконання таких вимог.

2. Характеристики широкосмугових взаємних функцій двох змінних

Функції двох змінних широко використовуються для аналізу і подання сигналів у багатьох областях. Вони також використовуються як для встановлення виду сигналу, так і для встановлення місць знаходження об'єктів. Такий аналіз використовується для визначення коефіцієнтів передачі багатьох систем, а також характеристик ефективності систем або каналів. Як вже зазначалося, що перетворення, які здійснюються в біомедицині, синтезі та розпізнаванні мови, геофізиці, океанографії, системах зондування та інших акустично чутливих системах вимагають широкосмугової, багатооктавної сигнальної обробки. Застосування малохвильової теорії для аналізу таких сигналів в багатьох випадках є дуже ефективним для вищезгаданих областей перетворення. Зауважимо, що малохвильова теорія може поширюватися не лише на опис областей перетворення сигналів, а й на функції їх обробки. Малохвильові перетворення відносять до великого класу часо-частотних перетворень, таких як короткочасове перетворення Фур'є (КЧПФ), перетворення Габора, розподіл Вайгнера, а також до перетворень вузькосмугових взаємних функцій двох змінних (ВВФДЗ). Здебільшого малохвильове перетворення визначають як широкосмугову взаємну функцію і таку подібність та її вплив поширюють на теорію функцій двох змінних. Таким чином, широкосмугова взаємна

функція двох змінних (ШВФДЗ) є просто дійсним малоохвильовим перетворенням [2,4], однак таке тлумачення справедливе при виконанні відповідних математичних вимог.

У взаємній обробці беруть участь базова малоохвильова функція і прийнятий сигнал. В основному функції двох змінних використовуються для визначення властивостей розкладу і обчислення малоохвильових перетворень. Трактують малоохвильового перетворення як функції обробки опорної кореляції (з базовою малоохвильовою функцією як опорним сигналом) дозволяє функції двох змінних перевіряти його властивості розкладу.

У вимірювальних пасивних системах зондування два прийнятих сигнали можуть вимагати виконання взаємної обробки. Проте, часове масштабування прийнятого сигналу, яке при цьому передбачається, є надзвичайно складною, з точки зору обчислення, задачею. Однак у малоохвильовій області, можливо ефективно сформулювати ШВФДЗ між двома прийнятими сигналами. Малоохвильова область має аналогічну структуру, як і сформоване за цим же методом швидке перетворення Фур'є (ШПФ).

Відзначимо, що функції двох змінних мають багато форм, в тому числі комбінації широкосмугові/вужкосмугові, авто/взаємні; їх можна представити через перетворення Фур'є, ШПФ і малоохвильове перетворення. Проте кожна така функція за своєю суттю є кореляцією “немодифікованого” сигналу з другим “модифікованим” сигналом. Результатом функції двох змінних є поверхня корельованих значень: по одній кореляції для кожної “модифікації” (наприклад, зміщення часу і масштабу часу або зміщення часу і зміщення частоти).

Функції двох змінних характеризують подібність між одним сигналом і багатьма модифікованими версіями іншого сигналу.

Коли модифікації сигналу масштабуються в часі і затримуються (зміщуються), тоді формується ШВФДЗ. Коли модифікації зміщуються в часі і частоті (зсуваються в часі і частоті), тоді формується ВВФДЗ [7].

ШВФДЗ визначена для двох сигналів $r_1(t)$ і $r_2(t)$. Припустимо, що $r_1(t)$ допустима функція. Тоді ШВФДЗ відображає два одновимірні сигнали скінченної енергії на двовимірну площину скінченної енергії [2]

$$\text{ШВФДЗ}[r_1, r_2](s, \tau) = \sqrt{s} \int r_2(t) r_1^*(st - \tau) dt \quad (1)$$

Тут "s" – параметр диференціального масштабу, а "τ" – параметр диференціальної затримки. Поняття “диференціальна” стосуються різниць між параметрами масштабу і затримки між двома сигналами, що обробляються, а не характеристик будь-якого із сигналів взятого окремо.

Наведена ШВФДЗ має форму типу “масштаб-затримка” оскільки перший сигнал $r_1(t)$ спочатку масштабується, а потім затримується перед здійсненням кореляції з другим сигналом. Якщо в круглих дужках член $t - \tau$ подати таким чином, щоб масштаб діяв на два параметри, тоді така форма відповідає типу “затримка-масштаб”. Обробка ВВФДЗ використовується в багатьох прикладних задачах. ВВФДЗ є “звичайною” функцією двох змінних [3,7] та визначається для двох сигналів $r(t)$ і $s(t)$, як

$$ВВФДЗ(\omega_D, \tau) = \int_{T_1}^{T_2} r(t) s^*(t - \tau) e^{-j\omega_D t} dt \quad (2)$$

Тут τ - часова затримка, а ω_D - зміна (Доплерівської) частоти.

Аналіз структур функцій обробки ШВФДЗ і ВВФДЗ вказує на те, що вони є ідентичні, за винятком кількох заміщень, а саме: оператор ШПФ замінюється на оператор малохвильового перетворення, оператор зміщення розширюється до двох вимірів і оператор оберненого ШПФ замінюється на оператор, аналогічний до оберненого малохвильового перетворення.

Початкова форма неперервної в часі ШВФДЗ між $r(t)$ і $s(t)$ має вигляд

$$ШВФДЗ(a, b) = \sqrt{a} \int_{T_1}^{T_2} r(t) s^*(at - b) dt \quad (3)$$

де $r(t)$ - прийнятий сигнал, а $s(t)$ - другий прийнятий сигнал (можливо, цей самий сигнал), a - часовий масштаб, а b - часова затримка або зміщення. Схема формування ШВФДЗ має структуру, наведену на рис. 1 [6].

Крім представлення ШВФДЗ згідно рівняння (3), можливе й інше її представлення

$$ШВФДЗ(a, b) = \sqrt{a} \int_0^T r(t) s^*(a(t - b)) dt \quad (4)$$

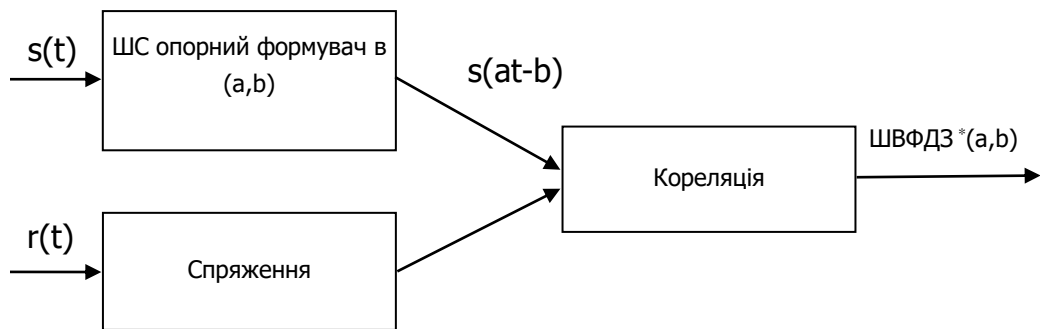


Рис. 1. Схема формування прямої ШВФДЗ

Існує декілька важливих відмінностей між цими функціями, що спричиняють порядок виконання операцій часового масштабування і часової затримки. ШВФДЗ на базі рівняння (3) початково масштабує сигнал, а потім затримує його. Однак ШВФДЗ на основі виразу (4) спочатку затримує, а потім масштабує сигнал. Так як малохвильове перетворення так само затримує, а потім масштабує сигнал, то малохвильове перетворення і ШВФДЗ за рівнянням (4) в основному ідентичні. Оскільки ШВФДЗ на основі рівняння (3) значно відрізняється від малохвильового перетворення, то вона

відповідно ідентифікується як окремий оператор. Зауважимо, що на практиці реалізуються обидва представлення ШВФДЗ.

3. Опис широкосмугових взаємних функцій двох змінних у малохвильовій області

Відомо, що вдалий вибір області подання сигналів дозволяє одночасно покращити ряд характеристик і отримати багатограннішу інформацію про сигнал.

Для кращого представлення ШВФДЗ в малохвильовій області і можливого порівняння з типовими ШВФДЗ, коротко проаналізуємо їх формування [2,9]. Обчислення ШВФДЗ виконуються вже тривалий час і будуються їх структурні реалізації з допомогою традиційних прямих формувачів шляхом моделювання виразу (4). Якщо один із сигналів наперед відомий, то масштаби і зміщення опор відомого сигналу можна незалежно заздалегідь обчислити. Тоді ШВФДЗ може бути обчислена шляхом виконання паралельних кореляцій цих попередньо обчислених опорних сигналів. Для формування ШВФДЗ дискретизовані широкосмугові опори цифрових сигналів вимагають повторної вибірки або зміни частоти дискретизації.

Необхідно відзначити, що в цьому випадку може бути використане більш швидкодіюче формування, однак наближеного опорного сигналу. Таке формування може бути реалізовано аналогічно як для когерентних вузькосмугових формувачів. Однак при цьому існує суттєвий вплив завад, які досить складно усуваються і вимагається деяка надлишковість обчислення.

Попередньо функція ШВФДЗ трактувалася як малохвильове перетворення, вхідні сигнали якої розглядалися як функції часу. В даному випадку пропонується виконання формування ШВФДЗ двох сигналів, кожний з яких вже представлений в малохвильовій області. Таке використання малохвильової області перетворення забезпечує ефективну обробку функції двох змінних і одночасно краще відображає характеристики сигналів для їх подальшого розпізнавання або інших досліджень. У випадку використання ВВФДЗ, для підвищення ефективності обчислення, а також оцінки спектрального складу сигналу, яке може бути використане для виділення, розпізнавання і визначення його характеристик, функція представляється з допомогою ШПФ. Подібний підхід використовується при поданні ШВФДЗ в малохвильовій області. У цьому випадку ШВФДЗ трактується як малохвильове перетворення, що характеризує просторові параметри. Для подання ШВФДЗ в малохвильовій області використовується теорема про тотожність [2].

Згідно з цією теоремою, якщо $r_1(x)$, $f_2(x)$ і $g(x)$ є функціями з скінченними енергіями (в $L^2(R)$), причому $g(x)$ є допустима функція типу

$$g_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

де $(a,b) \in R$, буде справедлива наступна рівність:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle r_1, g_{a,b} \rangle \langle g_{a,b}, f_2 \rangle db = c_g \langle r_1, f_2 \rangle$$

Константа c_g повинна бути визначеною (меншою, ніж нескінченність) і знаходиться аналогічно (1.53) як

$$c_g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty,$$

де $G(\omega)$ – перетворення Фур'є від g . Враховуючи, що

$$\langle g_{a,b}, f_2 \rangle = \langle f_2, g_{a,b} \rangle^*,$$

отримаємо

$$\langle r_1, f_2 \rangle = \frac{1}{c_g} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle r_1, g_{a,b} \rangle \langle f_2, g_{a,b} \rangle^* db. \quad (5)$$

Як вже згадувалось раніше, ШВФДЗ двох сигналів $r_1(t)$ і $r_2(t)$ (можливо навіть невідомих) визначається як

$$ШВФДЗ(S, \tau) = \sqrt{S} \int_{-\infty}^{\infty} r_1(t) r_2^*(St - \tau) dt,$$

де S і τ – параметри масштабу і зміщення відповідно.

Припустимо, що

$$f_2(t) = \sqrt{S} r_2(St - \tau),$$

тоді

$$ШВФДЗ(S, \tau) = \langle r_1(t), \sqrt{S} r_2(St - \tau) \rangle = \langle r_1, f_2 \rangle. \quad (6)$$

Представлення двох сигналів в малохвильовій області відносно базової малохвильової функції g створює дві групи коефіцієнтів малохвильового перетворення $W_g r_i(a, b)$, які представляють $r_i(t)$ для $i = 1, 2$. Таким чином, тепер обидва прийнятих сигнали представлені у малохвильовій області. Якщо $f_2(t) = r_2(t)$ (відповідає оцінці ШВФДЗ при $S=1$ і $\tau=0$), то можна обчислити обидві групи коефіцієнтів для розв'язання тотожності. Дані групи лише описують малохвильове перетворення $r_1(t)$ відносно g і спряження малохвильового перетворення $r_2(t)$ відносно g . Коли викорис g тоувати розв'язок тотожності, константу c_g слід враховувати заздалегідь, оскільки вона постійна, а через однаковість для усіх точок ШВФДЗ її не використовують для порівняння при (S, τ) -версії. Обчислення проводиться наступним чином

$$\begin{aligned} ШВФДЗ(S=1, \tau=0) &= \langle r_1(t), r_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle r_1, g_{a,b} \rangle \langle g_{a,b}, r_2 \rangle db = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} [W_g r_1(a,b)] [W_g r_2(a,b)]^* db. \end{aligned}$$

Якщо обидва сигнали будуть однакові, то їх малоохвильові перетворення будуть суміщені. В даному випадку отримана оцінка ШВФДЗ у початковому плані масштаб - затримка.

Замість оцінки ШВФДЗ лише в одній точці ($S=1$ і $\tau=0$) необхідно загалом трактувати її у малоохвильовій області шляхом розширення цієї окремої оцінки. Узагальнення отримується якщо врахувати, що f_2 , є функцією S і τ . Основою для цього є визначення коефіцієнтів малоохвильового перетворення f_2 для кожного S і τ як функції малоохвильових коефіцієнтів r_2 .

Вираз для узагальненого малоохвильового перетворення буде мати наступний вигляд:

$$W_g f_2(a,b) = W_g r_{2, \frac{1}{S}, \frac{\tau}{S}}(a,b) = \left\langle \sqrt{S} r_2(S t - \tau), \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle.$$

Враховуючи заміну змінних, отримаємо

$$\left\langle r_2(t'), \frac{1}{\sqrt{aS}} g\left(\frac{t' - (Sb - \tau)}{aS}\right) \right\rangle.$$

Для цього випадку коефіцієнти малоохвильового перетворення масштабованої і зміщеної версії r_2 можна визначити як

$$\langle f_2, g_{a,b} \rangle = W_g f_2(a,b) = W_g r_{2, \frac{1}{S}, \frac{\tau}{S}}(a,b) = W_g r_2(aS, Sb - \tau). \quad (7)$$

Підставляючи рівняння (7) в рівняння (5), отримуємо заміну представлення ШВФДЗ через функції малоохвильових перетворень двох отриманих сигналів:

$$ШВФДЗ(S, \tau) = W_{r_2} r_1\left(\frac{1}{S}, \frac{\tau}{S}\right) = \frac{1}{c_g} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} [W_g r_1(a,b)] [W_g^* r_2(Sa, Sb - \tau)] db \quad (8)$$

Таким чином, ШВФДЗ двох невідомих сигналів може бути обчислена в області малоохвильових перетворень. Якщо r_2 задовольняє вимоги, встановлені для базових функцій, то така ШВФДЗ подаватиме малоохвильове перетворення відносно нової базової малоохвильової функції r_2 і одночасно характеризуватиметься як дія деякого інтегрального оператора на два сигнали малоохвильових перетворень.

Значення такої заміни області подання полягає в тому, що малоохвильове перетворення кожного сигналу стосується довільної базової малоохвильової функції.

Оскільки базова малоохвильова функція вибирається і визначається заздалегідь, то можна легко і ефективно сформулювати математичну модель її часового масштабування і зміщення. В цьому випадку буде ефективним малоохвильове перетворення відносно базової функції g , а отже, – подальше формування ШВФДЗ.

Наведена на рис. 2 структурна схема формування взаємної ШВФДЗ повністю відображає її відтворення у малохвильовій області. Вона може в багатьох випадках порівнюватися з структурою формування ВВФДЗ і між ними можна проводити певні аналогії. В наведеній структурі обидва сигнали, які подані в часовій області $r_1(t)$ і $r_2(t)$, зазнають малохвильового перетворення відносно вищезгаданої базової малохвильової функції $g(t)$. Далі здійснюється масштабування (s) і зміщення (τ) одного з перетворень, яке розглядається як базове (аналогічно масштабуванню і

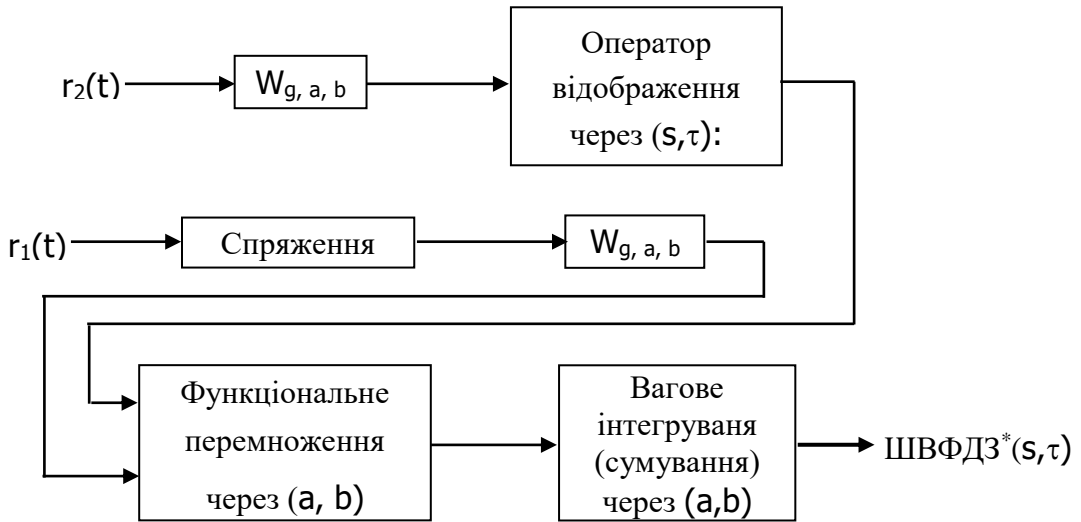


Рис. 2. Формування взаємної ШВФДЗ в малохвильовій області

зміщенню базової функції при звичайному малохвильовому перетворенні) в малохвильовій області. Завершуються перетворення перемноженнями і підсумовуваннями в двовимірному просторі.

Як зазначалося вище, ШВФДЗ визначаються через параметри S і τ . В деяких застосуваннях ці параметри можуть бути відображені просторовими параметрами кута і рівня. Оскільки в такому випадку ШВФДЗ може мати також просторову інтерпретацію, то таке просторове малохвильове перетворення можна сформулювати як оператор, що діє на два просторові окремі сигнали короткої тривалості (які можуть бути обома прийнятими сигналами або один прийнятим, а інший випромінюваним сигналом). При цьому замість перетворення сигналів у часовій області вони початково проходять малохвильове перетворення і подаються в малохвильовій області (неперервно або дискретно). Надалі операції відбуваються у вигляді дії на ці перетворені сигнали стосовно алгоритму передбаченого формування взаємної ШВФДЗ. Результат обчислення при цьому отримується повністю у малохвильовій області.

Подання ШВФДЗ в малохвильовій області має низку переваг при перетворенні сигналів та їх обробленні. При цьому окремі часові функції можуть бути нестационарними. Оскільки малохвильові перетворення діють на дані функції безпосередньо, то їх нестационарні характеристики можуть постійно враховуватися й

ефективно подаватися. Таким чином, “широкосмугові системи”, в яких відбуваються коливання (мають просторову нестаціонарність), можуть не лише характеризуватися з допомогою ШВФДЗ або просторовими малоохвильовими перетвореннями, але їх просторові характеристики самі можуть враховувати нестаціонарності перехідних сигналів. Раніше в деяких наукових працях здійснювалися спроби оцінити широкосмугові (просторові нестаціонарні) системи, в яких відбувалися коливання, шляхом припущення короткотривалої стаціонарності вузькосмугових сигналів (хвильових полів) і здійснення їх подальшого розкладу з допомогою перетворень Фур’є. Таким чином, проблема ставала математично обґрунтованою. Однак такі припущення недостатні для характеристики таких систем. Отже, великою перевагою запропонованого вище окремого малоохвильового перетворення є те, що воно враховує нестаціонарні короткотривалі (перехідні) характеристики сигналу і дозволяє використовувати їх для оцінки просторових нестаціонарних систем. Така одночасна обробка нестаціонарності в просторі і часі ілюструє важливе узагальнення широкосмугової часо-просторової обробки. Малоохвильове перетворення існує як в просторі (ШВФДЗ), так і в часі (сигнали окремих короткотривалих малоохвильових перетворень). Необхідно відзначити, що усі малоохвильові перетворення, включаючи малоохвильове перетворення ШВФДЗ, використовують часовий параметр.

У новому представленні ШВФДЗ зміна малоохвильової області в обох вимірах (рівняння (8)) подається через масштаб і зміщення одного малоохвильового перетворення перетворювача. Вказані масштаб і зміщення діють лише на просторові зміни (S, τ). Кожна оцінка ШВФДЗ через значення S, τ визначає ступінь подібності (спорідненості) між масштабованою і зміщеною версією одного прийнятого сигналу і немодифікованою версією іншого прийнятого сигналу. За додаткових припущень такі “ступені подібності” можуть мати просторове розміщення у вигляді просторового зображення. Як відзначалося раніше, оригінальні малоохвильові перетворення існують в часовій області, аналогічно вони існують в малоохвильовому перетворенні ШВФДЗ. Таким чином, часові і просторові виміри невіддільні в даній структурі і при цьому будується багатовимірне просторово-часове малоохвильове перетворення, яке може характеризувати як короткотривалі (перехідні) нестаціонарності сигналу (дві функції в (a, b) плані), так і просторову структуру (ШВФДЗ в $(S$ і τ) плані). Ключовим для нового багатовимірного малоохвильового перетворення в рівнянні (8) є те, що воно подає дві двовимірні функції через одну двовимірну функцію так, що розмірність при цьому не збільшується.

Основною перевагою заміни представлення ШВФДЗ через малоохвильове перетворення є ефективність реалізованої структури. Першочергово, коли обидва сигнали в ШВФДЗ невідомі, така багатовимірна структура малоохвильового перетворення дозволяє з допомогою довільної відомої базової малоохвильової функції розкласти сигнал на множину коефіцієнтів. Потім операції, які здійснюють масштабування в цій області, відображаються через зміщення. Коли вимагаються малі масштаби, то операція зміщення є більш ефективною, ніж операції багатоступеневого фільтрування. Таким чином, нове подання може ефективніше формувати масштабовані опори в області перетворення.

Якщо повернутися до структури формування взаємної ШВФДЗ в малоохвильовій області (Рис. 2) де наведені два малоохвильові перетворення виконуються відносно тієї

самої базової малохвильової функції, то можна стверджувати, що отримане взаємне малохвильове перетворення вказує на рівень спорідненості між двома оригінальними малохвильовими перетвореннями або сигналами [5,8]. Спорідненість може існувати з різних причин і кожне застосування може приводити до різних пояснень цієї спільності. Прикладом спорідненості між двома малохвильовими перетвореннями або сигналами є випадок, при якому два приймачі спостерігають спільне джерело сигналу. Величина взаємного малохвильового перетворення може мати пік, який буде вказувати на цю спорідненість. Можуть спостерігатися багатократні спорідненості сигналів, які будуть формувати піки при взаємному малохвильовому перетворенні. При обробленні сигналів, які прийняті двома різними просторовими приймачами, взаємне малохвильове перетворення може виділити частини цих сигналів, які є спільними для обох прийнятих сигналів (частини сигналів, які є в “полі зору” обох давачів). Розглянемо випадок, коли давачем 1 приймається один із сигналів (рис. 3), а давачем 2 – другий, який до того ж є сумою двох FM сигналів, але іншої затримки і масштабі (відповідно до розміщених різних просторових джерел).

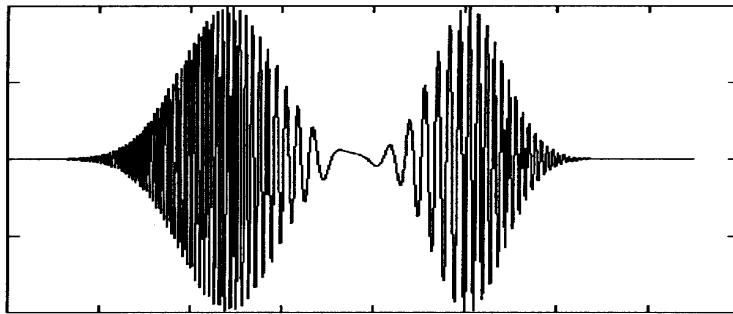


Рис. 3. Сигнали прийняті першим і другим давачами

Спочатку такі вхідні сигнали часової області піддаються малохвильовому перетворенню відносно довільної базової малохвильової функції (в даному випадку базової малохвильової функції Морлета), а потім над обома малохвильовими перетвореннями здійснюється взаємний процес, який створює нове малохвильове перетворення (або ШВФДЗ). Вигляд такого перетворення наведений на рис. 4.



Рис. 4 Взаємне малохвильове перетворення

Особливістю такого малоохвильового перетворення є те, що воно знаходиться в просторовій області, а масштаб і зміщення кінцевого взаємного малоохвильового перетворення представляють просторові параметри, такі як кут і діапазон або діапазон і швидкість. Необхідно відзначити, що в такій області перетворення також покращуються як роздільна здатність, так і коефіцієнт передачі сигналу. Взаємне малоохвильове перетворення забезпечує часомасштабне представлення як перехідний етап, який може бути дуже корисним для деяких накопичень даних або алгоритмів оброблення в нейронних мережах.

Прикладом ще одного використання взаємного малоохвильового перетворення може бути знаходження спорідненості двох вихідних сигналів двох різних систем, які мають однакові вхідні сигнали. Вихідні сигнали можуть бути аналогічно трансформовані з допомогою малоохвильового перетворення, а взаємне малоохвильове перетворення утворюється з цих двох індивідуальних перетворень. Взаємне перетворення в цьому випадку вказує на спорідненість (або відмінність) між двома системами. Згадані міри подібності можуть бути використані при виділенні особливостей аналізованих структур або у схемах моделювання.

На практиці в багатьох ситуаціях мають місце використання більше ніж двох перетворювачів і при цьому виникають необхідності оцінки взаємних кореляцій. Багатократні ШВФДЗ можуть бути сформовані в малоохвильовій області, однак кожний сигнал може бути трансформований лише один раз. Операції, що вимагаються для додаткових перетворювачів, це лише перемноження у малоохвильовій області з відповідним подальшим здійсненням інтегрування або сумовування.

Нове формування взаємного ШВФДЗ може бути інтерпретоване як взаємний малоохвильовий спектр. Таке представлення аналігічне до формування ВВФДЗ стосовно взаємного спектра.

Висновки

Встановлено, що розглянуте представлення взаємної ШВФДЗ в малоохвильовій області, порівняно з традиційним зображенням ШВФДЗ в часовій області, отримує ряд позитивних властивостей:

- коли два малоохвильові перетворення, що обробляються, використовують одну базову малоохвильову функцію, то взаємне малоохвильове перетворення визначає ступінь кореляції між двома оригінальними малоохвильовими перетвореннями або сигналами, або ж локалізує джерела цих кореляцій;
- взаємне малоохвильове перетворення відображає два прийняті сигнали в просторове малоохвильове перетворення або ШВФДЗ, при цьому перші два перетворення здійснюються в масштабованому і зміщеному просторі відносно параметра часу; масштаб і зміщення такого взаємного малоохвильового перетворення характеризують просторові параметри (кут і діапазон або діапазон і швидкість). Важливою особливістю є те, що просторові характеристики ШВФДЗ дають можливість оцінювати нестационарні перехідні (швидкоплинні) сигнали;
- в поданій таким чином ШВФДЗ суттєво покращуються роздільна здатність і коефіцієнт передачі в просторовій області малоохвильового перетворення з одночасним забезпеченням ефективної реалізації структури такого формування.

Взаємне малохвильове перетворення забезпечує часомасштабне представлення як проміжне зображення, яке може бути дуже корисним для обробки деяких змішаних даних або алгоритмів обробки в нейронних мережах [8].

Література

1. Chui C.K. Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications / Chui C.K. -Texas AEM University, 1993.
2. Young R.K. Wavelet Theory and its Applications / Young R.K. – Pennsylvania State University, 1994. – (Kluwer Academic Publishers).
3. Задирака В.К. Цифровая обработка сигналов / Задирака В.К., Мельникова С.С. – К.: Наукова думка, 1993. –294 с.
4. Наконечний А.Й. Теорія малохвильового (wavelet) перетворення та її застосування / Наконечний А.Й. – Львів : Фенікс, 2001. - 278 с.
5. Наконечний А.Й. Зображення широкосмугових взаємних двозначних функцій в малохвильовій області / Наконечний А.Й. - 1999. -178-184с. – (Міжвідомчий збірник наукових праць Національної АН України “Відбір і обробка інформації”; Вип. 13).
6. Наконечний А.Й. Моделювання широкосмугового сигналу і його кореляційне оброблення на основі малохвильового перетворення / Наконечний А.Й., Самотий В.В. – 2004. - 70-74с. – (Науково-прикладний журнал „Технічна електродинаміка” ; №5).
7. Наконечний А.Й. Інтерпретація вимог широкосмугових сигналів / Наконечний А.Й. – 2000. - 12-17с. - (Міжвідомчий науково-технічний збірник “Вимірювальна техніка та метрологія” ; №56).
8. Наконечний А.Й. Взаємне опрацювання широкосмугових сигналів // Збірник праць V Міжнародної конференції з автоматичного управління та інформаційних технологій «ІСАСІТ - 2019», Львів, 20-22 червня 2019 р. С.7 -9.
9. Наконечний А.Й., Лагун І.І., Верес З.С., Наконечний Р.А., Федак В.І. Теорія і практика обробки сигналів у малохвильовій (wavelet) області, під редакцією А.Й. Наконечного: Монографія. – Львів: Вид-во Растер -7, 2020 – 470 с.

Image of broadband reciprocal functions of two variables in the small-wavelength (wavelet) domain

Adrian Nakonechnyy, Roman Musii, Rostyslav Nakonechnyy

The main requirements for broadband signals are formulated. It is noted that the properties of the resolution of the wavelet transformation remain constant when the signals change over many octaves and make it possible to implement signal processing in a wide frequency range. It is shown that the broadband reciprocal function of two variables (BBRFTV) can be considered, if the appropriate mathematical requirements are met, as a valid small-wavelength transform that represents the similarity between one signal and many possible modified versions of another signal. The analysis of the BBRFTV was carried out depending on the order of mastabulation and displacement operations. For the analysis of broadband systems, it is proposed to use mutual BBRFTVs, which allow to obtain effective processing of the functions of two variables and at the same time better display the characteristics of signals for their further recognition and research. It has been established that since individual small-wave transformations take into account the non-stationary short-term (transient) characteristics of signals, in the case of the use of mutual BBRFTVs, there is a possibility of their application for the evaluation of spatial non-stationary systems.

Отримано 02.12.22.