УДК 539.374

doi.org/10.15407/fmmit2022.34-35.065

Моделювання процесу сушіння капілярно-пористого тіла циліндричної форми

Богдана Гайвась[1], Адріан Торський[2], Вероніка Дмитрук[3]

[1] д. т. н., с. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: haj@cmm.lviv.ua.
[2] к. т. н., с. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005; Національний університет «Львівська політехніка», вул. С.Бандери, 12e-mail: adrian@cmm.lviv.ua
[3] к. т. н., Національний університет «Львівська політехніка», вул. С.Бандери, 12, e-mail: dmytruk15@gmail.com

В процесі сушіння капілярно-пористих матеріалів рухома поверхня фазового переходу, яка розділяє осушену і вологу зони в тілі, суттєво залежить від властивостей матеріалу і температури, яка зумовлена зовнішнім впливом сушильного агента, і є функцією координат та часу, а переміщення границь є наслідком фазових переходів. Вважаємо, що приведені властивості матеріалу є функціями пористості, густин та теплоємностей компонент тіла.

Ключові слова: *капілярно-пористе тіло, квазігомогенне наближення, триетапний тепловий режим, інтегральне перетворення, фазові переходи, циліндричні функції.*

Вступ. Метою даного дослідження є побудова математичної моделі процесу осушення капілярно-пористого бруса кругового поперечного перерізу радіуса R ($0 \le r \le R,$) під дією конвективно-теплового нестаціонарного потоку сушильного агента.

1. Постановка задачі

Вважаємо, що початкова температура циліндра не залежить від його довжини, а змінюється тільки в його поперечному перерізі. Враховуючи симетрію граничних умов даної задачі, обмежимось розглядом плоскої задачі теплопровідності. Введемо полярну систему координат (r,φ), полярна вісь якої напрямлена по осі циліндра. Припускаємо, що режим сушильного агента трьохетапний, нестаціонарний і включає нагрів, витримку і охолодження.

Процес теплопереносу в пористому круглому брусі описується рівнянням:

$$\left[\Pi(C_v\rho_v + C_a\rho_a) + (1-\Pi)C_s\rho_s\right]\frac{\partial T}{\partial \tau} + \gamma_1^2 T = \lambda\left[r^2\frac{d^2T}{dr^2} + (2\alpha+1)r\frac{dT}{d\,r} + \left(\alpha^2 - \lambda^2 r^2\right)T\right], \quad (2\alpha+1>0). \quad (1)$$

Тут τ - час; r - радіус біжучої точки $(0 \le r \le R)$; γ_1^2 - коефіцієнт розпаду частинок.

Рівняння (1) з використанням диференціального оператора Бесселя:

$$B_\alpha[T]=\left[r^2\frac{d^2T}{dr^2}+(2\alpha+1)r\frac{dT}{d\,r}+\left(\alpha^2-\lambda^2r^2\right)T\right]$$

для приведеної об’ємної теплоємності $c\rho$ та усередненої теплопровідності λ в квазігомогенному наближенні, яке можна застосовувати в задачах сушіння деревини при допустимих градієнтах температури, має вигляд [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}+\gamma^2T=a^2B_\alpha[T,r],\quad \gamma^2=\frac{\gamma_1^{\;2}}{c\rho},\quad \alpha>O, \tag{2}$$

де $a^2=\dfrac{\lambda}{\left[\Pi(C_v\rho_v+C_a\rho_a)+(1-\Pi)C_s\rho_s\right]}$ - приведений коефіцієнт температуропровідності.

Побудуємо розв’язок рівняння (2) за таких крайових умов:

$$T(\tau,r)\big|_{\tau=0}=g(r),\quad r\in(0,R); \tag{3}$$

$$\lim\big|_{r\to0}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha T\right)=0,\quad \left(\alpha_{11}^1\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^1\right)T\big|_{r\to R}=T_a(\tau). \tag{4}$$

Тут T_a - температура сушильного агента; γ^2 відповідає за розмноження частинок пароповітряної суміші (приведений коефіцієнт розпаду) в пористому матеріалі при дії сушильного агента; індексами v,a,s позначено компоненти пари, повітря та скелету відповідно; $\Pi,C_v,C_a,C_s,\rho_v,\rho_a,\rho_s$ - пористість, тепломність, густина пари, повітря, скелету; λ - приведений коефіцієнт теплопровідності; $\alpha_{11}^1,\beta_{11}^1$ - коефіцієнти теплопровідності та теплообміну на зовнішній бічній поверхні циліндра.

Приймаємо температуру сушильного агента $T_a(\tau)$ такою:

$$T_a(\tau)=\begin{cases}T_0+\dfrac{T_{\max}-T_0}{\tau_1}\tau, & 0\le\tau\le\tau_1\\ T_{\max}, & \tau_1\le\tau\le\tau_2\\ \dfrac{T_{\max}\tau_3-T_1\tau_2}{\tau_3-\tau_2}-\dfrac{T_{\max}-T_1}{\tau_3-\tau_2}\tau. & \tau_2\le\tau\le\tau_3\end{cases}. \tag{5}$$

Розкладемо дану функцію в тригонометричний ряд Фур’є за косинусами: $T_a(\tau)=\alpha_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\dfrac{n\pi}{\tau_3}\tau$, $\nu_n^2=\dfrac{n\pi}{\tau_3}$.

$$\alpha_0=\frac{2}{\tau_3}\left[T_{\max}\left(-\frac{\tau_1}{2}+\frac{\tau_2}{2}+\frac{\tau_3}{2}\right)+T_0\frac{\tau_1}{2}+T_1\left(-\frac{\tau_2}{2}+\frac{\tau_3}{2}\right)\right],$$

$$\alpha_n=\frac{2}{\tau_3}\left[\frac{(T_{\max}-T_0)}{\tau_1\nu_n^4}\left(\cos\nu_n^2\tau_1-1\right)+\frac{T_{\max}}{\nu_n^2}(\sin\nu_n^2\tau_2-\sin\nu_n^2\tau_1)\right]+$$

$$+\frac{2}{\tau_3}\left\{-\frac{T_{\max}\tau_3-T_1\tau_2}{\tau_3-\tau_2}\frac{\tau_2}{n\pi}\sin\nu_n^2\tau_2-\frac{T_{\max}-T_1}{\tau_3-\tau_2}\left(\frac{1}{\nu_n}\right)^4\left[(-1)^n-\cos\nu_n^2\tau_2-\frac{n\pi\tau_2}{\tau_3}\sin\nu_n^2\tau_2\right]\right\}.$$

Нехай $T*(p,r)$ є зображенням температури $T(\tau,r)$ за Лапласом: $L\left[T(\tau,r)\right]=\int\limits_0^\infty T(\tau,r)e^{-p\tau}d\tau=T*(p,r).$

Тоді у відповідність задачі (1)-(4) отримаємо наступну крайову задачу відносно функції $T*(p,r)$:

$$\left(B_{\nu,\alpha}-\lambda^2\right)T*=\frac{d^2T*}{dr^2}+\frac{2\alpha+1}{r}\frac{dT*}{dr}-\left(\lambda^2+\frac{\nu^2-\alpha^2}{r^2}\right)T*=-\tilde{g}(r), \tag{6}$$

$$\lim\Big|_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\alpha-\nu}T*(p,r)\right)=0,\quad \left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr}+\beta_{11}^1\right)T*\Big|_{r=R}=T_a^*(p). \tag{7}$$

$$\tilde{g}(r)=a^{-2}r^{-2}g(r),\qquad \nu^2=a^{-2}\left(p+\gamma^2\right),\quad p=\sigma+i\tau,\quad i^2=-1\,.$$

Зафіксуємо вітку $\operatorname{Re}\nu=\operatorname{Re}\left[a^{-1}\left(p+\gamma^2\right)^{1/2}\right]>0$. Побудуємо функцію Коші для рівняння (6), що задовольняє однорідні граничні умови. Фундаментальна функція $\varepsilon_\alpha^*(p,r,\rho)$, що задовольняє відповідне рівнянню (6) однорідне рівняння та відповідні (7) однорідні умови, є функцією Коші. Розв'язок рівняння (6), що задовольняє відповідні (7) однорідні умови, має вигляд:

$$T^*(p,r)=\int\limits_0^R \varepsilon_\alpha^*(p,r,\rho)\tilde{g}(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho\,,$$

де $\varepsilon_\alpha^*(p,r,\rho)$ є фундаментальна функція крайової задачі (6)-(7) з такими властивостями:

1. $\varepsilon_\alpha^*(p,r,\rho)$ задовольняє відповідне рівнянню (6) однорідне рівняння і наступні крайові умови[1]: $\lim\Big|_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\alpha-\nu}\varepsilon*\right)=0,\quad \left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr}+\beta_{11}^1\right)\varepsilon*\Big|_{r=R}=0.$ При цьому $\varepsilon_\alpha^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-\varepsilon_\alpha^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0}=0\,.$

2. $d/dr\varepsilon_\alpha^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-d/dr\varepsilon_\alpha^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0}=\rho^{-(2\alpha+1)}.$

Приймемо

$$\varepsilon_\alpha^*(p,r,\rho)=\begin{cases}A_1I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho) & 0<r<\rho<R\\ A_2I_{\nu,\alpha}(\lambda r)+B_2K_{\nu,\alpha}(\lambda r), & 0<\rho<r<R\end{cases},$$

де $I_{\nu,\alpha}(\lambda r)$, $K_{\nu,\alpha}(\lambda r)$ - модифіковані функції Бесселя першого та другого роду. $\nu = ia^{-1}\beta$, $\operatorname{Re}\nu \geq \alpha \geq -\frac{1}{2}$, яке запишемо у вигляді

$$p = -\left(\beta^2 + \gamma^2\right) = \left(\beta^2 + \gamma^2\right)e^{\pi i}, \quad dp = -2\beta d\beta, \quad b(\beta) = a^{-1}\beta.$$

Повертаючись до оригіналу, отримаємо

$$T(\tau, r) = \frac{a^{-2}}{2\pi i}\int_0^R \Big(\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \varepsilon_\alpha{}^*(p, r, \rho)e^{p\tau}dp \Big) g(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho,$$

де a^{-2} - вагова функція [1]:. Особливими точками функції Коші $\varepsilon^*(p, r, \rho)$ є точки галуження $p = -\gamma^2 \leq 0$ і точка $p = \infty$.

Позначимо

$$X^{11}_{\alpha;11}(\lambda R, b) = \alpha^1_{11}\frac{d}{dr}C_\alpha(\lambda r, b) + \beta^1_{11}C_\alpha(\lambda r, b)\big|_{r=R} =$$

$$\alpha^1_{11}\lambda\left[\frac{dI_{i\beta,\alpha}(\lambda R)}{dr} + \frac{i}{\pi}sh\pi b\frac{dK_{i\beta,\alpha}(\lambda R)}{dr}\right] +$$

$$+\beta^1_{11}\left[I_{i\beta,\alpha}(\lambda R) + i\pi^{-1}sh\pi b\, K_{i\beta,\alpha}(\lambda R)\right] = \tilde{X}^{(11)}_{\alpha,11}(\lambda R) + i\frac{sh\pi b}{\pi}\tilde{X}^{(12)}_{\alpha,11}(\lambda R);$$

$$X^{12}_{\alpha;11}(\lambda R, b) = \left(\alpha^1_{11}\frac{d}{dr} + \beta^1_{11}\right)D_\alpha(\lambda r, b)\big|_{r=R} = \alpha^1_{11}\lambda\left[\frac{1}{\pi}sh\pi b\frac{dK_{i\beta,\alpha}(\lambda R)}{dr}\right] +$$

$$\beta^1_{11}\pi^{-1}sh\pi b\, K_{i\beta,\alpha}(\lambda R) =$$

$$= \pi^{-1}sh\pi b\left[\alpha^1_{11}\lambda\frac{d}{dr}K_{i\beta,\alpha}(\lambda R) + \beta^1_{11}K_{i\beta,\alpha}(\lambda R)\right] = \tilde{X}^{12}_{\alpha,11}(\lambda R)\frac{sh\pi b}{\pi}, \tag{8}$$

$$\tilde{X}^{11}_{\alpha,11}(\lambda R) = \alpha^1_{11}\lambda\frac{dI_{i\beta,\alpha}(\lambda R)}{dr} + \beta^1_{11}I_{i\beta,\alpha}(\lambda R),$$

$$\tilde{X}^{12}_{\alpha,11}(\lambda R) = \alpha^1_{11}\lambda\frac{dK_{i\beta,\alpha}(\lambda R)}{dr} + \beta^1_{11}K_{i\beta,\alpha}(\lambda R).$$

Якщо перейти до функцій Бесселя дійсного аргумента $J_{\nu,\alpha}(\lambda R, b), N_{\nu,\alpha}(\lambda R, b)$, то

$$X^{11}_{\alpha;11}(\lambda R, b) = \left(\alpha^1_{11}\frac{\nu-\alpha}{R} + \beta^1_{11}\right)J_{\nu,\alpha}(\lambda R, b) - \alpha^1_{11}R\lambda^2 J_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R, b), \; b = a^{-1}\beta;$$

$$X^{12}_{\alpha;11}(\lambda R, b) = \left(\alpha^1_{11}\frac{\nu-\alpha}{R} + \beta^1_{11}\right)N_{\nu,\alpha}(\lambda R, b) - \alpha^1_{11}R\lambda^2 N_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R, b).$$

Визначимо функції:

$$U_{\nu,\alpha;11}^{11}(\lambda R,b)= X_{\alpha;11}^{11}(\lambda R,b)-i\,X_{\alpha;11}^{12}(\lambda R,b)=$$
$$=\tilde{X}_{\alpha,11}^{11}(\lambda R)=\alpha_{11}^{1}\lambda\frac{dI_{i\beta,\alpha}(\lambda R)}{dr}+\beta_{11}^{1}I_{i\beta,\alpha}(\lambda R)=$$
$$=\left(\alpha_{11}^{1}\frac{\nu-\alpha}{R}+\beta_{11}^{1}\right)I_{\nu,\alpha}(\lambda R,b)+\alpha_{11}^{1}R\lambda^{2}I_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R,b);\quad \nu=a^{-1}\beta;$$

$$U_{\nu,\alpha;11}^{12}(\lambda R)=\pi(shb\pi)^{-1}X_{\alpha,11}^{12}(\lambda R,b)=$$
$$=\left(\alpha_{11}^{1}\frac{d}{dr}+\beta_{11}^{1}\right)K_{\nu,\alpha}(\lambda r)\Big|_{r=R}=\tilde{X}_{\alpha,11}^{12}(\lambda R,b)=$$
$$=\left(\alpha_{11}^{1}\frac{\nu-\alpha}{R}+\beta_{11}^{1}\right)K_{\nu,\alpha}(\lambda R)+\alpha_{11}^{1}R\lambda^{2}K_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R)\,. \tag{9}$$

Задовольняючи умови (7), отримаємо алгебраїчну систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A_1, A_2, B_2 :

$$(A_2-A_1)I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)+B_2K_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)=0,$$
$$(A_2-A_1)I'_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)+B_2K'_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)=-\frac{1}{\lambda\rho^{2\alpha+1}}\,.$$

Враховуючи тотожність

$$I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)K'_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)-I'_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)K_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)=-(\lambda\rho)^{-(2\alpha+1)},$$

знаходимо

$$(A_2-A_1)=-\lambda^{2\alpha}K_{\nu,\alpha}(\lambda\rho),\quad B_2=\lambda^{2\alpha}I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho). \tag{10}$$

Задовольняючи крайову умову для $r=R,$ отримуємо:

$$A_2U_{\nu,\alpha;11}^{11}(\lambda R)+B_2U_{\nu,\alpha;11}^{12}(\lambda R)=0, \tag{11}$$

$$A_2=\lambda^{2\alpha}\frac{\Psi_{\nu,\alpha,11}^{1*}(\lambda R,\lambda\rho)}{U_{\nu,\alpha,11}^{11}(\lambda R)}-\lambda^{2\alpha}K_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)=$$

$$\lambda^{2\alpha}\left\{\frac{\psi_{\nu,\alpha,11}^{1*}(\lambda R,\lambda\rho)-U_{\nu,\alpha,11}^{11}(\lambda R)K_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)}{U_{\nu,\alpha,11}^{11}(\lambda R)}\right\}=$$

$$=-\lambda^{2\alpha}\frac{U_{\nu,\alpha,11}^{12}(\lambda R)}{U_{\nu,\alpha,11}^{11}(\lambda R)}I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)=-B_2\frac{U_{\nu,\alpha,11}^{12}(\lambda R)}{U_{\nu,\alpha,11}^{11}(\lambda R)},\qquad A_1=\frac{B_2K_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)}{I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)}+A_2.$$

$$=-\lambda^{2\alpha}\frac{U_{\nu,\alpha,11}^{12}(\lambda R)}{U_{\nu,\alpha,11}^{11}(\lambda R)}I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)=-B_2\frac{U_{\nu,\alpha,11}^{12}(\lambda R)}{U_{\nu,\alpha,11}^{11}(\lambda R)},\quad A_1=\frac{B_2K_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)}{I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)}+A_2.$$

Тоді функція $\varepsilon_{\alpha}^{*}(p,r,\rho)$ внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має вигляд

$$\varepsilon_{\alpha}^{*}(p,r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha}}{U_{\nu,\alpha;11}^{11}(\lambda R,b)}\begin{cases}I_{\nu,\alpha}(\lambda r)\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(\lambda R,\lambda\rho), & 0<r<\rho<R\\ I_{\nu,\alpha}(\lambda\rho)\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(\lambda R,\lambda r), & 0<\rho<r<R\end{cases}. \tag{12}$$

Корені $p_n=-\left(\beta_n{}^2+\gamma^2\right)$ трансцендентного рівняння $U_{\nu,\alpha;11}^{11}(\lambda R,b)=0$ є простими полюсами $\varepsilon_{\alpha}^{*}(p,r,\rho)$. Розглянемо трансцендентне рівняння:

$$\left(\alpha_{11}^{1}\frac{\nu-\alpha}{R}+\beta_{11}^{1}\right)I_{\nu,\alpha}(\lambda R,b)-\alpha_{11}^{1}\lambda^{2}RI_{\nu+1,\alpha+1}(\lambda R,b)=0,$$

де $p=-\left(\beta^2+\gamma^2\right)=\left(\beta^2+\gamma^2\right)e^{\pi i}$, $b(\beta)=a^{-1}\beta$ і утворюють дискретний спектр $.\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Позначимо $\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1}(\lambda R,\lambda r,b)=\pi^{-1}(sh\pi b)\times\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(\lambda R,\lambda r,b)$.

Тут $\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1}(\lambda R,\lambda r,b)$ - власна функція задачі, що задовольняє рівнянню (2) та однорідним граничним умовам. Використаємо її для побудови розв'язку задачі, що задовольняє неоднорідній умові на зовнішній границі циліндра, тобто відображає вплив дії сушильного агента.

Оригінал фундаментальної функції

$$\varepsilon_{\alpha}(t,r,\rho)=\int_0^{\infty}e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1}(\lambda R,\lambda r,b)\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1}(\lambda R,\lambda\rho,b)\frac{2\beta\lambda^{2\alpha}d\beta}{\left(X_{\alpha;11}^{11}\right)^2+\left(X_{\alpha;11}^{12}\right)^2}=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}V_{\alpha}(r,\beta)V_{\alpha}(\rho,\beta)\Omega_{\alpha}(\beta)d\beta; \tag{13}$$

$$\Omega_{\alpha}(\beta)=\frac{2\beta\lambda^{2\alpha}}{\left(X_{\alpha;11}^{11}(\lambda R,\beta)\right)^2+\left(X_{\alpha;11}^{12}(\lambda R,\beta)\right)^2}.$$

За узагальненою теоремою розвинення $\varepsilon_{\alpha}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\beta_n^2+\gamma^2\right)t}\dfrac{V_{\alpha}(b_n r)V_{\alpha}(b_n\rho)}{\left\|V_{\alpha}(b_n r)\right\|_1^2}$,

де $\left\|V_{\alpha}(b_n r)\right\|_1^2$ квадрат норми власної функції, b_n-корені функції $U_{\nu,\alpha;11}^{11}(\lambda R,b)$.

$$\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(i\lambda R,i\lambda\rho)=-\frac{\pi}{2}e^{-\pi i\alpha}\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1}(\lambda R,\lambda\rho)$$

$$V_{\alpha}(r,\beta)=\Psi^{1}{}_{\alpha;11}(\lambda R,\lambda r,\beta)=X_{\alpha;11}^{11}(\lambda R,\beta)D_{\alpha}(\lambda r,\beta)-X_{\alpha;11}^{12}(\lambda R,\beta)C_{\alpha}(\lambda r,\beta). \tag{14}$$

$$\Psi^{*1}{}_{\nu,\alpha;11}(i\lambda R,i\lambda r)=-\frac{\pi}{2}e^{-\pi i\alpha}\Psi^{1}{}_{\nu,\alpha;11}(\lambda R,\lambda r).$$

Тут $V_\alpha(r,\beta)=\Psi^1_{\alpha;11}(\lambda R,\lambda r,\beta)$ - власна (спектральна) функція задачі (6), $\Omega_\alpha(\beta)$ - спектральна густина

Повертаючись в рівності (13) до оригіналу, отримаємо розв'язок $T_{odn}(t,r)$ однорідної параболічної задачі Коші (2)-(3):

$$T_{odn}(t,r)=\int_0^R \varepsilon_\alpha(t,r,\rho)g(\rho)\rho^{2\alpha-1}a^{-2}d\rho=$$

$$\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_\alpha(r,\beta)\int_0^R g(\rho)V_\alpha(\rho,\beta)\sigma\rho^{2\alpha-1}d\rho\Omega_\alpha(\beta)d\beta,\quad \sigma=a^{-2}. \tag{15}$$

Із (15) при $t=0$ отримуємо інтегральне зображення:

$$g(r)=\int_0^\infty V_\alpha(r,\beta)\int_0^R g(\rho)V_\alpha(\rho,\beta)\sigma\,\rho^{2\alpha-1}d\rho\,\Omega_\alpha(\beta)d\beta. \tag{16}$$

Із рівності (16) випливає, що функція $\varepsilon_\alpha(t,r,\rho)$, визначена формулою (13), є дельта-подібною по t послідовністю при $t\to 0+$.

Інтегральне зображення (16) визначає пряме

$$H_\alpha[g(r)]=\int_0^R g(r)V_\alpha(r,\beta)\sigma r^{2\alpha-1}dr\equiv\tilde{g}(\beta); \tag{17}$$

і обернене

$$H^{-1}{}_\alpha[\tilde{g}(r)]=\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V_\alpha(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)d\beta\equiv g(r) \tag{18}$$

інтегральне перетворення Конторовича – Лебедєва на проміжку $[0,R]$.

Враховуючи теорему про основну тотожність інтегрального перетворення [1] диференціального оператора B_α,

$$H_\alpha\left[a^2B_\alpha[g(r)]\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)+\frac{sh\,\pi\beta}{\pi\lambda^{2\alpha}}g_R(\tau). \tag{20}$$

Тому на основі співвідношення (17) випливає:

$$H_\alpha\left[a^2B_\alpha[g(r)]\right]=-\beta^2\int_0^R g(r)V_\alpha(r,\beta)\sigma r^{2\alpha-1}dr+\frac{sh\pi\beta}{\pi\lambda^{2\alpha}}T_a(R,\tau). \tag{21}$$

З властивостей власної функції $V_\alpha(r,\beta)$ випливає, що

$$\left(\alpha^1_{11}\frac{dV_\alpha(r,\beta)}{dr}+\beta^1_{11}V_\alpha(r,\beta)\right)\Big|_{r=R}=0,\quad \left(a^2B_\alpha+\beta^2\right)V_\alpha(r,\beta)=0.$$

З виразу (21) , враховуючи при цьому (19), одержимо

$$H_\alpha\left[a^2 B_\alpha\left[g(r)\right]\right]=a^2\int_0^R B_\alpha\left[g(r)\right]V_\alpha(r,\beta)\sigma r^{2\alpha-1}dr=$$

$$=\int_0^R\left[r^2\frac{d^2g}{dr^2}+(2\alpha+1)r\frac{dg}{dr}-\lambda^2r^2g(r)+\alpha^2g(r)\right]V_\alpha(r,\beta)r^{2\alpha-1}dr=$$

$$=a^2\sigma r^{2\alpha+1}\left[g'(r)V_\alpha(r,\beta)-g(r)V'_\alpha(r,\beta)\right]\Big|_0^R+$$

Тоді із (21) отримаємо:

$$\frac{g_R}{\alpha_{11}^1}V_\alpha(R,\beta)=\frac{g_R}{\alpha_{11}^1}\left[X_{\alpha;11}^{11}(\lambda R,b)D_\alpha(\lambda R,b)-X_{\alpha;11}^{12}(\lambda R,b)C_\alpha(\lambda R,b)\ \right]=$$

$$=g_R\left[C'_{r\alpha}(\lambda R,b)D_\alpha(\lambda R,b)-D'_{r\alpha}(\lambda R,b)C_\alpha(\lambda R,b)\right]=\frac{sh\pi b}{\pi\lambda^{2\alpha}R^{2\alpha+1}}T_{aR}\,. \quad (22)$$

Рівняння теплопровідності та крайові умови матимуть вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}+\left(\beta^2+\gamma^2\right)T=0;\quad T(\tau,\beta)\big|_{\tau=0}=g(\beta),\quad \left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr}+\beta_{11}^1\right)T(r)\big|_{r=R}=T_{aR}(\tau).$$

Внаслідок тотожності (21) отримаємо

$$\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tau}+\left(\beta^2+\gamma^2\right)\tilde{T}=\frac{sh\pi b}{\pi\lambda^{2\alpha}}T_{aR}(\tau);\quad \tilde{T}(\tau,\beta)\big|_{\tau=0}=\tilde{g}(\beta). \quad (23)$$

Розв’язком задачі Коші (23) є функція

$$\tilde{T}(\tau,\beta)=e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)\tau}\tilde{g}(\beta)+\int_0^\tau e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)(\tau-t)}\left[\frac{sh\pi b}{\pi\lambda^{2\alpha}}\left(\alpha_0+\sum_{n=1}^\infty\alpha_n\cos\nu_n^2t\right)\right]dt\,. \quad (24)$$

Застосуємо до $\tilde{T}(\tau,\beta)$ інтегральний оператор $H^{-1}{}_\alpha$ (18), отримаємо розв’язок задачі (24)

$$T(t,r))=\int_0^t\int_0^R\int_0^\infty e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)(t-\tau)}V_\alpha(r,\beta)V_\alpha(\rho,\beta)\Omega_\alpha(\beta)d\beta\left[\delta_+(\tau)g(\rho)\right]\sigma\rho^{2\alpha-1}d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^t e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)(t-\tau)}\frac{sh\pi b}{\pi\lambda^{2\alpha}}T_a(\tau)V_\alpha(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)d\beta d\tau\,. \quad (25)$$

З виразів (17), (18) та теореми Стеклова будь-яку вектор-функцію $f(r)=B_\alpha\left[g(r)\right]$ неперервну на $(0,R)$, що задовольняє нульовим крайовим умовам, можна розкласти за системою власних функцій $V_\alpha\left(r,\beta_j\right)_{j=1}^\infty$ в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур’є.

Відомо, що кожному власному числу β_j відповідає одна власна вектор-функція $V_\alpha\left(r,\beta_j\right)$ і система спектральних функцій $V_\alpha\left(r,\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}$ повна і замкнута. Квадрат норми власної функції $\left\|V_\alpha\left(r,\beta_j\right)\right\|^2 = \int\limits_0^R \left[V_\alpha\left(r,\beta_j\right)\right]^2 \sigma r^{2\alpha-1} dr.$

Так враховуючи вираз (17), обернений інтегральний оператор (18) можна записати

$$H_\alpha^{-1}\left[\tilde{g}(r)\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{g}\left(\beta_j\right) V_\alpha\left(r,\beta_j\right)\left(\left\|V_\alpha\left(r,\beta_j\right)\right\|^2\right)^{-1} \equiv g(r),$$

а функцію

$$G_\alpha(t,r,\rho) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t} V_\alpha(r,\beta) V_\alpha(\rho,\beta) \Omega_\alpha(\beta) d\beta, \qquad (26)$$

яка враховує початковий температурний стан тіла, можна представити в результаті обчислення інтегралу згідно теорії лишків у вигляді

$$G_\alpha(t,r,\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\left(\beta_j{}^2+\gamma^2\right)t} \frac{V_\alpha\left(r,\beta_j\right) V_\alpha\left(\rho,\beta_j\right)}{\left\|V_\alpha\left(r,\beta_j\right)\right\|^2} \sigma a^2,$$

де

$$V_\alpha\left(r,\beta_j\right) = \Psi^1{}_{\alpha;11}\left(\lambda R, \lambda r, \beta_j\right) =$$

$$\frac{sh\pi\beta_j}{\pi}\left[X_{\alpha;11}^{11}\left(\lambda R,\beta_j\right) D_\alpha\left(\lambda r,\beta_j\right) - X_{\alpha;11}^{12}\left(\lambda R,\beta_j\right) C_\alpha\left(\lambda r,\beta_j\right)\right],$$

а також функцію Гріна, що породжена тепловим режимом на межі $r = R$

$$W_\alpha(t,r) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t} V_\alpha(r,\beta) \frac{sh\pi\beta}{\pi\lambda^{2\alpha}} \Omega_\alpha(\beta) d\beta, \quad b = a^{-1}\beta, \qquad (27)$$

$$W_\alpha(t,r) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\left(\beta_j^2+\gamma^2\right)t} \frac{sh\pi\beta_j}{\pi\lambda^{2\alpha}} \frac{V_\alpha\left(r,\beta_j\right)}{\left\|V_\alpha\left(r,\beta_j\right)\right\|^2} \sigma a^2.$$

Тоді розв'язок задачі прийме вигляд

$$T(t,r)) = \int\limits_0^t \int\limits_0^R G_\alpha(t-\tau,r,\rho)\left[\delta_+(\tau) g(\rho)\right] \sigma \rho^{2\alpha-1} d\rho d\tau + \int\limits_0^t W_\alpha(t-\tau,r) T_a(\tau) d\tau \,. \qquad (28)$$

Тут $\delta_+(t)$ - дельта –функція, зосереджена в точці 0+. Згідно (28), враховуючи властивості дельта-функції та вираз (17), отримаємо

$$T(t,r)=\int_0^{\infty} e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}\tilde{g}(\beta)V_\alpha(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)d\beta+$$

$$+\int_0^{\infty}\int_0^{t} e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)(t-\tau)}\frac{sh\pi\beta}{\pi\lambda^{2\alpha}}T_{aR}(\tau)V_\alpha(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)d\beta.$$

Позначимо $\int_0^{t} e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)(t-\tau)}\frac{sh\pi b}{\pi\lambda^{2\alpha}}T_{aR}(\tau)d\tau=T_{wa}(t,\beta)$. Приходимо до невласних інтегралів

$$T(t,r)=\int_0^{\infty} e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}\tilde{g}(\beta)V_\alpha(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)d\beta+\int_0^{\infty} T_{wa}(\tau,\beta)V_\alpha(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)d\beta.$$

Враховуючи вирази (26), (27), отримаємо

$$T(t,r)=\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\left(\beta_j{}^2+\gamma^2\right)t}\tilde{g}\left(\beta_j\right)\frac{V_\alpha\left(r,\beta_j\right)}{\left\|V_\alpha\left(r,\beta_j\right)\right\|^2}\sigma a^2+\sum_{j=1}^{\infty}T_{wa}\left(\tau,\beta_j\right)\frac{V_\alpha\left(r,\beta_j\right)}{\left\|V_\alpha\left(r,\beta_j\right)\right\|^2}\sigma a^2.$$

Визначимо фундаментальний розв'язок задачі Коші згідно (17)

$$H_\alpha\left[g(r)\right]=\int_0^{R} g(\rho)V_\alpha(\rho,\beta)\sigma\rho^{2\alpha-1}d\rho\Omega_\alpha(\beta)d\beta=g(\beta)$$

Використаємо основну тотожність інтегрального перетворенняреження

$$H_\alpha\left[a^2B_\alpha\left[g(r)\right]\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)+\frac{sh\pi b}{\pi\lambda^{2\alpha}}g_R$$

Визначимо фундаментальний розв'язок задачі Коші згідно (17)

$$H_\alpha\left[g(r)\right]=\left(\int_0^{R} g(\rho)V_\alpha(\rho,\beta)\sigma\rho^{2\alpha-1}d\rho\right)=g(\beta)$$

Використаємо основну тотожність інтегрального перетворення

$$H_\alpha\left[a^2B_\alpha\left[g(r)\right]\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)+\frac{sh\pi b}{\pi\lambda^{2\alpha}}g_R$$

Якщо застосувати до крайової задачі інтегральний оператор H_α. отримаємо

$$\left(\beta^2+q^2\right)\tilde{T}(\beta)=\tilde{g}(\beta)+\frac{sh\pi\beta}{\pi\lambda^{2\alpha}}g_R$$

, або

$$\tilde{T}(\beta)=\frac{\tilde{g}(\beta)}{\left(\beta^2+q^2\right)}+\frac{sh\pi\beta}{\pi\lambda^{2\alpha}\left(\beta^2+q^2\right)}g_R$$

.

Якщо до функції $\tilde{T}(\beta)$ застосувати інтегральний оператор H_α^{-1}, то отримується розв'язок задачі (1)-(2) у вигляді

$$T(t,r)=\int_0^{t}\left(\int_0^{\infty}\frac{sh\pi\beta V_\alpha(r,\beta)\Omega(r,\beta)d\beta}{\pi\lambda^{2\alpha}\left(\beta^2+q^2\right)}g_R(\tau)\right)d\tau+$$

$$\int_0^R \left(\int_0^\infty \frac{V_\alpha(r,\beta)V_\alpha(\rho,\beta)}{\left(\beta^2+q^2\right)} \Omega(r,\beta)d\beta \right) g(\rho)\rho^{2\alpha-1}.$$

Якщо порівняти (5) з (4), отримуємо формули обчислення невласних інтегралів

$$\int_0^\infty \frac{sh\pi\beta V_\alpha(r,\beta)\Omega(r,\beta)d\beta}{\pi\lambda^{2\alpha}\left(\beta^2+q^2\right)} g_R(\tau) = \frac{I_{q,\alpha}(\lambda r)}{U_{q,\alpha}^{11}(\lambda R)} g_R(\tau),$$

$$\int_0^\infty \frac{V_\alpha(r,\beta)V_\alpha(\rho,\beta)}{\left(\beta^2+q^2\right)} \Omega(r,\beta)d\beta =$$

$$= \varepsilon(r,\rho,q) = \frac{\lambda^{2\alpha}}{U_{q,\alpha;11}^{11}(\lambda R)} \begin{cases} I_{q,\alpha}(\lambda r)\psi_{q,\alpha;11}^{1*}(\lambda R,\lambda\rho) & 0<r<\rho<R \\ I_{q,\alpha}(\lambda\rho)\psi_{q,\alpha;11}^{1*}(\lambda R,\lambda r) & 0<\rho<r<R \end{cases};$$

$$U_{\nu,\alpha;11}^{11}(\lambda R,b) = X_{\alpha;11}^{11}(\lambda R,b) - i\,X_{\alpha;11}^{12}(\lambda R,b) =$$

$$= \tilde{X}_{\alpha,11}^{11}(\lambda R) = \alpha_{11}^{1}\lambda \frac{dI_{i\beta,\alpha}(\lambda R)}{dr} + \beta_{11}^{1} I_{i\beta,\alpha}(\lambda R), \quad b = a^{-1}\beta;$$

$X_{\alpha;11}^{11}(\lambda R,\beta)$, $X_{\alpha;11}^{12}(\lambda R,\beta)$ визначені формулами (8).

Для нестаціонарного випадку

$$\int_0^\infty e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t} \frac{sh\pi\beta V_\alpha(r,\beta)\Omega(r,\beta)d\beta}{\pi\lambda^{2\alpha}} g_R = \frac{I_{q,\alpha}(\lambda r)}{U_{q,\alpha}^{11}(\lambda R)} g_R(t),$$

$$\int_0^\infty e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t} V_\alpha(r,\beta)V_\alpha(\rho,\beta)\Omega(r,\beta)d\beta = \varepsilon(r,\rho,q) =$$

$$= \frac{\lambda^{2\alpha}}{U_{q,\alpha;11}^{11}(\lambda R)} \begin{cases} I_{q,\alpha}(\lambda r)\psi_{q,\alpha;11}^{1*}(\lambda R,\lambda\rho) & 0<r<\rho<R \\ I_{q,\alpha}(\lambda\rho)\psi_{q,\alpha;11}^{1*}(\lambda R,\lambda r) & 0<\rho<r<R \end{cases}.$$

Висновки. В роботі побудовано розв’язок про розподіл температури в поперечному перерізі довгого капілярно-пористого бруса при сушінні в 3-етапному температурному режимі агента сушки. Розв’язок побудовано в модифікованих функціях Бесселя. Визначено залежність між часом сушіння і усередненими параметрами капілярно-пористого матеріалу циліндричного тіла, зокрема відносною насиченістю вологою, температуропровідністю, які враховують фактор переміщення рухомої границі осушеної зони.

Література

[1] *Ленюк І. М., Міхалевська Г. І.* Інтегральні перетворення типу Конторовича- Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 279 с.

[2] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Гос. издат. Физ. Мат. Лит., 1963. – 1099 с.

[3] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

[4] *Уголев Б. Н., Скуратов Н. В.* Моделирование процесса сушки древесины // Сборник научн. трудов МЛТИ, 1992. – № 247. - С. 133-141.

[5] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука., 1986. – 800 с.

[6] *Шубин Г. С.* Сушка и тепловая обработка древесины. – М.: Лесная промышленность, 1990. – 336 с.

Modeling of the drying process of a capillary-porous cylindrical body

Bohdana Haivas, Adrian Torsky, Veronika Dmytruk

In the process of drying capillary-porous materials, the movable surface of the phase transition, which separates the dried and wet zones in the body, depends on the properties of the material and the temperature due to external influence of the drying agent, is a function of coordinates and time. We assume that the above properties of the material are functions of porosity, density and heat capacity of body components.

Отримано 14.10.22