

Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною отворів довільної конфігурації за врахування розподіленого навантаження на поверхні панелі

Тетяна Шопя

ст.н.сп., к.ф.-м.н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, 79060, Львів, e-mail: tetyana.sh@gmail.com

В межах уточненої теорії, яка враховує деформацію поперечного зсуву, побудовано розв'язок задачі про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з довільною кількістю отворів довільної конфігурації за врахування гармонічного в часі довільного розподіленого зовнішнього навантаження на поверхні панелі. Зовнішня границя панелі є довільної форми. Розглянуто різні типи гармонічних в часі граничних умов на контурах отворів та на контурах зовнішньої межі панелі. Розв'язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів. Використано секвенціальний підхід до зображення функцій Гріна. Інтегральні рівняння розв'язано методом колокацій.

Ключові слова: коливання, ортотропна панель подвійної кривини, отвори, непрямий метод граничних елементів.

Вступ. Дослідження роботи елементів конструкцій в динамічному режимі має широке практичне застосування в інженерній практиці. В літературі відомо багато робіт, в яких розглядають коливання панелей з внутрішніми отворами, а також панелей з довільною формою зовнішньої границі, однак в більшості з них використовують для дослідження метод скінченних елементів та метод Рітца. В роботі [1] побудовано розв'язки задач про усталені коливання трансверсально-ізотропної шарнірно опертої прямокутної в плані панелі з отвором довільної конфігурації, коли на його контурі задано різні типи крайових умов, а також задачі про усталені коливання трансверсально-ізотропної шарнірно опертої прямокутної в плані панелі з вирізами довільної конфігурації на кутах, на контурах яких панель вільна від навантаження, в межах теорії оболонки, яка враховує деформацію поперечного зсуву та не враховує жорсткі повороти навколо нормалі до серединної поверхні, на основі непрямого методу граничних елементів та послідовнісного представлення дельта функцій Дірака для знаходження функцій Гріна. В роботі [2] таким же методом побудовано розв'язок задачі про усталені коливання ортотропної панелі з довільною формою плану з множиною отворів довільної конфігурації, коли на контурах зовнішньої межі панелі та на контурах отворів задано одночасно різні типи крайових умов, в межах теорії оболонки, яка враховує поперечні зсуви.

Метою даної роботи є побудова розв'язку загальнішої задачі, ніж в роботі [2], врахувавши прикладене зовнішнє розподілене навантаження на поверхні панелі.

1. Формулювання задачі.

Розглянемо задачу про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з довільною формою плану, яка містить довільну кількість отворів довільної конфігурації, коли на контурах зовнішньої межі панелі та на контурах отворів задано одночасно різні типи крайових умов, як і в роботі [2], однак врахуємо прикладене зовнішнє розподілене навантаження на поверхні панелі, яке задають такі функції

$$q_1(\alpha, t) = q_{01}(\alpha) \sin(\omega t), \quad q_2(\alpha, t) = q_{02}(\alpha) \sin(\omega t), \quad q_3(\alpha, t) = q_{03}(\alpha) \sin(\omega t), \\ m_1(\alpha, t) = m_{01}(\alpha) \sin(\omega t), \quad m_2(\alpha, t) = m_{02}(\alpha) \sin(\omega t).$$

Для дослідження використовуємо рівняння теорії оболонок, які враховують деформацію поперечного зсуву та інерційні компоненти, як і в праці [2], однак приймаємо до уваги, що функції, які задають зовнішнє розподілене навантаження на поверхні панелі вже не дорівнюють нулю

$$\{P(\alpha, t)\} = \{q_1(\alpha, t), q_2(\alpha, t), q_3(\alpha, t), m_1(\alpha, t), m_2(\alpha, t)\}^T.$$

Розглядаємо такі ж крайові умови на контурах зовнішньої межі панелі та на контурах отворів, як у праці [2]. Використовуємо позначення статті [2].

2. Розв'язок задачі.

Розв'язуємо крайову задачу на основі непрямого методу граничних елементів, використовуючи такі ж функції Гріна, як в праці [2], які знайдені за використання послідовнісного представлення дельта функції Дірака та методу рядів Фур'є [1,3,4].

Розв'язок представляємо у вигляді суми потенціалу простого шару та розв'язку, знайденого методом рядів Фур'є в прямокутній в плані області Π , яка містить розглядувану багатозв'язну область Ω , за крайових умов $w(\alpha, t) = 0$, $u_\tau(\alpha, t) = 0$, $\gamma_\tau(\alpha, t) = 0$, $M_n(\alpha, t) = 0$, $N_n(\alpha, t) = 0$, $\alpha \in \partial\Pi$,

$$\{U(\alpha, t)\} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [E_{km}(\alpha)] [U_{km}] [E_{km}(\xi)] \{T(\xi)\} dl(\xi) \sin(\omega t) - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [E_{km}(\alpha)] [U_{km}] \{P_{km}\} \sin(\omega t), \quad \{P_{km}\} = \{q_{1km}, q_{2km}, q_{3km}, m_{1km}, m_{2km}\}^T,$$

$q_{1km}, q_{2km}, q_{3km}, m_{1km}, m_{2km}$ – коефіцієнти розкладу функцій

$q_{01}(\alpha), q_{02}(\alpha), q_{03}(\alpha), m_{01}(\alpha), m_{02}(\alpha)$ в ряди Фур'є за системами функцій

$\Phi_{km}^1(\alpha), \Phi_{km}^2(\alpha), \Phi_{km}^3(\alpha), \Phi_{km}^4(\alpha), \Phi_{km}^5(\alpha)$ відповідно, $[E_{km}(\alpha)]$ – діагональна

матриця з діагональними елементами $\Phi_{km}^i(\alpha), i = \overline{1,5}$, а $[U_{km}] = [L^{km}]^{-1}$.

Систему інтегральних рівнянь відносно функцій густин потенціалів простого шару будемо за використання методу фіктивного контуру та розв'язуємо методом

колокацій [2]. Відповідно система $5 \sum_{j=1}^{N+3} S^{(j)}$ лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих дискретних значень функцій густин потенціалів простого шару $\{T^{(j)r}\}$, $j = \overline{1, N+3}$, $r = \overline{1, S^{(j)}}$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \left\{ u_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right\}^T = \\ & = - \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[E_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \{T^{(f)r}\} - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q}) \right] \{P_{km}\}, \\ & \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, q = \overline{1, S^{(j)}}, j = \overline{1, N_1}, j = N+1, \\ & \left\{ N_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), N_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), Q_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right\}^T = \\ & = - \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[E_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \{T^{(f)r}\} - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha^{(j)q}) \right] \{P_{km}\}, \\ & \alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, q = \overline{1, S^{(j)}}, j = \overline{N_1+1, N_1+N_2}, j = N+2, \\ & w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = - \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) w_i(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 w_i(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i, \\ & u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = - \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) u_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 u_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= - \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) \gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
&- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 \gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i, \\
\alpha^{(j)q} &\in L^{(j)}, q=1, \overline{S^{(j)}}, j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3}, j = N + 3, \\
M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= - \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) M_{in}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
&- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 M_{in}(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i, \\
N_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= - \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) N_{in}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
&- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 N_{in}(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i, \\
\alpha^{(j)q} &\in L^{\varepsilon(j)}, q=1, \overline{S^{(j)}}, j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3}, j = N + 3.
\end{aligned}$$

Власні частоти шукаємо, прирівнюючи визначник системи лінійних алгебричних рівнянь до нуля, а характеристики напружено-деформованого стану – на основі знайдених дискретних значень функцій густин потенціалів простого шару $\{T^{(j)r}\}$, $j = \overline{1, N+3}$, $r = \overline{1, S^{(j)}}$ за формулами

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} u_n(\alpha, t) \\ u_{\tau}(\alpha, t) \\ w(\alpha, t) \\ \gamma_n(\alpha, t) \\ \gamma_{\tau}(\alpha, t) \end{Bmatrix} &= - \sum_{j=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha) \right] \left[E_{km}(\alpha^{(j)r}) \right] \{T^{(j)r}\} \sin(\omega t) - \\
&- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha) \right] \{P_{km}\} \sin(\omega t),
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} N_n(\alpha, t) \\ N_\tau(\alpha, t) \\ Q_n(\alpha, t) \\ M_n(\alpha, t) \\ M_\tau(\alpha, t) \end{pmatrix} = - \sum_{j=1}^{N+3S^{(j)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha) \right] \left[E_{km}(\alpha^{(j)r}) \right] \{ T^{(j)r} \} \sin(\omega t) - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha) \right] \{ P_{km} \} \sin(\omega t).$$

3. Числові результати.

Розглянуто ортотропну шарнірно оперту панель подвійної кривини прямокутну в плані, яка містить два підкріплені отвори. На деякій прямокутній ділянці на поверхні панелі між отворами прикладене зовнішнє рівномірно розподілене поперечне навантаження. В даному випадку уявно розширену прямокутну в плані область П доцільно вибрати так, щоб її межа співпадала з зовнішньою межею панелі. Геометричні параметри панелі:

$$h = 0.005 \text{ m}, \quad l_1 = 2 \text{ m}, \quad l_2 = 1 \text{ m},$$

$$k_1 = 0.2 \text{ m}^{-1}, \quad k_2 = 0.3 \text{ m}^{-1}, \quad \text{Фізичні параметри панелі: } \rho = 3600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad E_1 = 172 \text{ GPa},$$

$$E_2 = 63,9 \text{ GPa}, \quad G_{12} = 24,8 \text{ GPa}, \quad G_{13} = 28,5 \text{ GPa}, \quad G_{23} = 13,8 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.27,$$

$$\nu_{21} = \frac{E_1}{E_2} \nu_{12}. \quad \text{Параметри апроксимації: } K = 50, \quad S^{(1)} = S^{(2)} = 20, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\pi R_1}{N_1}. \quad \text{Метод}$$

узагальненого підсумовування:

$$C_{km}(\varepsilon) = \mu_{km} \frac{4}{l_1 l_2} \frac{\left(\sin\left(\frac{\lambda_{1k} \varepsilon_1}{2}\right) \right)^2 \left(\sin\left(\frac{\lambda_{2m} \varepsilon_2}{2}\right) \right)^2}{\left(\frac{\lambda_{1k} \varepsilon_1}{2} \right)^2 \left(\frac{\lambda_{2m} \varepsilon_2}{2} \right)^2}.$$

На контурах отворів задано амплітуди компонент переміщень:

$$w_0^{(1)}(\alpha) = 0.005, \quad u_{\tau 0}^{(1)}(\alpha) = 0, \quad \gamma_{\tau 0}^{(1)}(\alpha) = 0, \quad u_{n 0}^{(1)}(\alpha) = 0, \quad \gamma_{n 0}^{(1)}(\alpha) = 0,$$

$$w_0^{(2)}(\alpha) = -0.004, \quad u_{\tau 0}^{(2)}(\alpha) = 0, \quad \gamma_{\tau 0}^{(2)}(\alpha) = 0, \quad u_{n 0}^{(2)}(\alpha) = 0, \quad \gamma_{n 0}^{(2)}(\alpha) = 0.$$

На зовнішній межі панелі задано амплітуди компонент переміщень та зусиль:

$$w_0^{(3)}(\alpha) = 0, \quad u_{\tau 0}^{(3)}(\alpha) = 0, \quad \gamma_{\tau 0}^{(3)}(\alpha) = 0, \quad M_{n 0}^{(3)}(\alpha) = 0, \quad N_{n 0}^{(3)}(\alpha) = 0.$$

Розглянуто отвір радіуса $R_1 = 0,2 \text{ m}$ з координатами центра $\alpha_1 = 0,5 \text{ m}, \alpha_2 = 0,5 \text{ m}$ та отвір радіуса $R_2 = 0,2 \text{ m}$ з координатами центра $\alpha_1 = 1,5 \text{ m}, \alpha_2 = 0,5 \text{ m}$. Частота

усталених коливань $\bar{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} = 25 \text{ Hz}$. Рівномірно розподілене поперечне зовнішнє навантаження діє на прямокутну ділянку зі сторонами $a = b = 0,2 \text{ m}$ та центром у точці $\alpha_1 = 1 \text{ m}$, $\alpha_2 = 0,5 \text{ m}$ на поверхні панелі. Інші компоненти розподіленого зовнішнього навантаження на поверхні панелі вважаємо нульовими: $q_{01}(\alpha) = 0$, $q_{02}(\alpha) = 0$, $m_{01}(\alpha) = 0$, $m_{02}(\alpha) = 0$.

На рисунках 1 – суцільна лінія, 2 – штрихова, а 3 – пунктирна.

На рис. 1 зображено амплітуду прогину панелі на лінії $\alpha_2 = 0,5l_2$ за дії на поверхні панелі зовнішнього розподіленого поперечного навантаження. На рис. 2 зображено амплітуду прогину панелі на лінії $\alpha_2 = 0,5l_2$ за різного розташування центра ділянки на поверхні панелі, де прикладене зовнішнє розподілене поперечне навантаження $q_{03}(\alpha) = -7 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.



Бачимо, що зі збільшенням зовнішнього розподіленого поперечного навантаження на поверхні панелі, амплітуда прогину панелі збільшується за величиною, однак в точках на контурах отворів амплітуда прогину панелі не змінилась, бо її задано в крайових умовах. Легко помітити, що розташування ділянки, де прикладене зовнішнє розподілене поперечне навантаження на поверхні панелі, суттєво впливає на амплітуду прогину панелі.

На рис. 3 зображено амплітуду прогину панелі на лінії $\alpha_2 = 0,5l_2$ у випадку різної локалізації зовнішнього розподіленого поперечного навантаження на поверхні панелі.

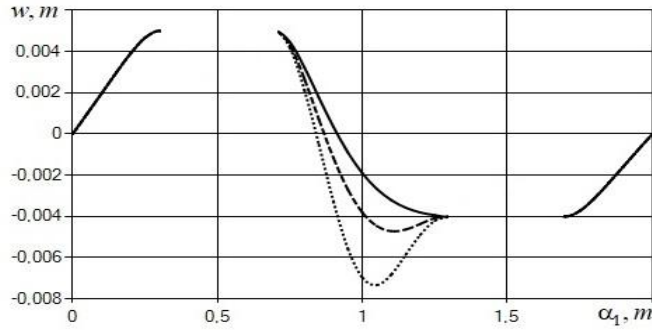


Рис. 3. Амплітуда прогину панелі для різної локалізації зовнішнього розподіленого поперечного

навантаження на поверхні панелі: 1 – $q_{03}(\alpha) = -4/9 \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $a = b = 0,3 \text{ m}$,

2 – $q_{03}(\alpha) = -5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $a = b = 0,2 \text{ m}$, 3 – $q_{03}(\alpha) = -4 \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, $a = b = 0,1 \text{ m}$.

Бачимо, що у даному випадку при зменшенні розмірів ділянки, де прикладене зовнішнє розподілене поперечне навантаження на поверхні панелі, його вплив на амплітуду прогину панелі зростає.

На рис. 4, 5 зображено амплітуду прогину панелі на лінії $\alpha_2 = 0.5l_2$ при різних значеннях частоти усталених коливань у випадку наявності та відсутності зовнішнього розподіленого поперечного навантаження на поверхні панелі.

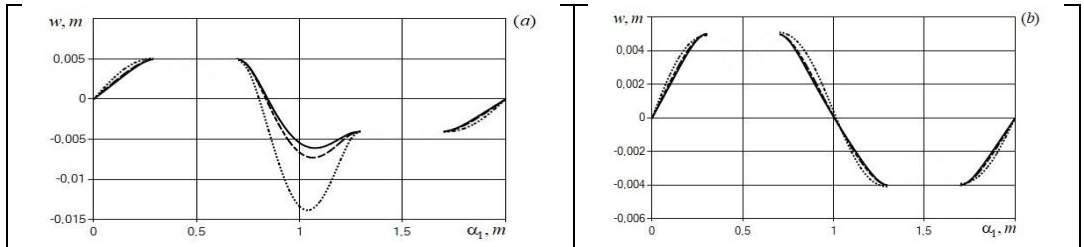


Рис. 4 Амплітуда прогину панелі при різних значеннях частоти вимушувальних факторів у випадку: 1 – $\bar{\omega} = 50 \text{ Hz}$, 2 – $\bar{\omega} = 150 \text{ Hz}$, 3 – $\bar{\omega} = 250 \text{ Hz}$,

(a) – $q_{03}(\alpha) = -7 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, (b) – $q_{03}(\alpha) = 0 \text{ N/m}^2$.

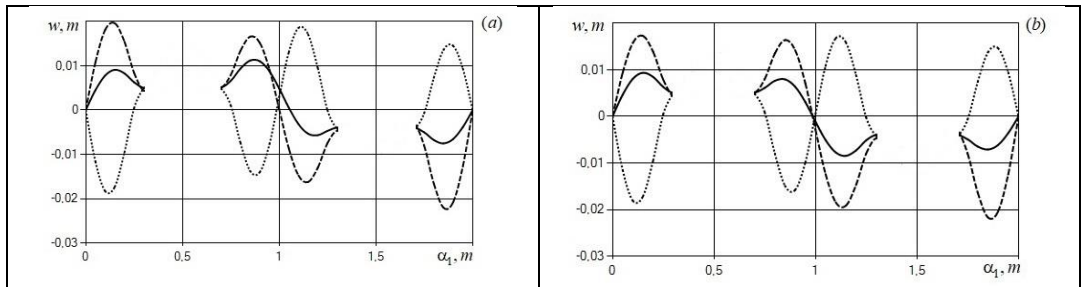


Рис. 5 Амплітуда прогину панелі при різних значеннях частоти вимушувальних факторів у випадку: 1 – $\bar{\omega} = 500 \text{ Hz}$, 2 – $\bar{\omega} = 600 \text{ Hz}$, 3 – $\bar{\omega} = 700 \text{ Hz}$,

(a) – $q_{03}(\alpha) = -7 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, (b) – $q_{03}(\alpha) = 0 \text{ N/m}^2$.

Бачимо, що амплітуда прогину панелі суттєво залежить від частоти усталених коливань.

Висновки. В межах уточненої теорії оболонки, яка враховує деформацію поперечного зсуву та інерційні компоненти, на основі непрямого методу граничних елементів за використання послідовнісного представлення функцій Гріна розв'язано задачу про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з довільною кількістю отворів довільної конфігурації. Зовнішня межа панелі також має довільну форму. На поверхні панелі прикладене гармонічне в часі довільне розподілене зовнішнє навантаження. Розглянуто різні типи крайових умов на контурах зовнішньої межі панелі та на контурах отворів. Досліджено випадок шарнірно опертої прямокутної в плані ортотропної панелі подвійної кривини, яка містить два круглі підкріплені отвори, а на прямокутну ділянку між отворами на поверхні панелі прикладене рівномірно розподілене зовнішнє поперечне навантаження. На основі наведених числових результатів з метою верифікації числової схеми можна стверджувати, що значення амплітуди прогину панелі істотно залежить від частоти коливань та параметрів зовнішнього навантаження. Побудована числова схема є загальною для дослідження розв'язків у різних випадках задачі.

Література

1. Бурак Я.Й., Рудавський Ю.К., Сухорольський М.А. Аналітична механіка локально навантажених оболонки. – Львів: Інтеллект-Захід, 2007. – 240 с.
2. Shopa T. Vibration of an orthotropic doubly curved panel with a set of cutouts of any configuration under mixed boundary conditions // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – **249**, 3. – P. 521-238.
3. Lighthill J. Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions. – Cambridge University Press, 1958. – 79 p.
4. Сухорольський М.А. Послідовності і ряди. – Львів: Растр-7, 2010. – 346 с.

Vibration of orthotropic doubly curved panel with a set of cutouts of arbitrary configuration taking into account distributed load on the surface of the panel

Tetiana Shopa

In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation, the solution of the problem on the steady state vibrations of the orthotropic doubly curved panel with the arbitrary number of cutouts of arbitrary configuration taking into account harmonic in time arbitrary distributed external load on the surface of the panel is constructed. External boundary of the panel is of arbitrary shape. Different types of harmonic in time boundary conditions are considered on the contours of the cutouts and on the contours of the external boundary of the panel. The solution is built on the basis of the indirect boundary elements method. The sequential approach to the representation of the Green's functions is used. Integral equations are solved by the collocation method.

Отримано 22.07.22.