

Моделювання масопереносу в складних пористих середовищах циліндричної форми.

Ярослав П'янило¹, Ольга Іващенко², Ганна Лянце¹, Олександр Калиніченко⁴,
Анатолій Лопатьєв³, Адріан Торський¹

¹Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України

²Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди

³Львівський державний університет фізичної культури ім. Івана Боберського

⁴Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнології ім. С.З. Гжицького

В роботі побудована математична модель масопереносу в складному пористому середовищі, яке має форму пористого циліндра заданої висоти. Досліджено вплив параметрів пористого середовища на процес розподілу тиску.

Ключові слова: математичне моделювання, процеси фільтрації, методи розв'язування крайових задач, числовий експеримент.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є процеси фільтрації рідин або газів в пористих середовищах циліндричної форми із заданими параметрами.

Результати досліджень. Значна частина природних об'єктів та живих організмів мають пористу структуру, в яких проходять процеси різного роду. До них можна віднести процеси гемодіалізу, масоперенос в рослинах, процеси масопереносу вуглеводнів в підземних покладах, водоносні пласти та пласти підземних сховищ газу тощо. Часто геометрія пористих середовищ є близькою до прямокутних або циліндричних форм. Масоперенос в такого роду складних пористих середовищах описується диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Фільтрація газу в пласті підземного сховища в нестационарному випадку описується нелінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних з розподіленими параметрами [1-3,9]

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{k_{x_1} h}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{k_{x_2} h}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{k_{x_3} h}{\mu z} \frac{\partial p^2}{\partial x_3} \right) = 2\alpha_n m h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{z} \right) + 4m h q p_{st}, \quad (1)$$

що має місце в трьох вимірній області $\Omega_3 = \Omega_3(x_1, x_2, x_3) \subset R^3$, яку займає пласт ПСГ. На Ω_3 задана множина точок (свердловин) з координатами $\{x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}\}$, $i = 1, \dots, n$, та значення тисків $p(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, t_0)$ в цих точках в момент часу t_0 . В рівнянні (1) позначено: k_u – проникність пласту в напрямі u , μ – динамічна в'язкість газу, h – товщина пласту, m – пористість пласту, α_n – коефіцієнт ефективної газонасиченості, q – густина відбору, яка визначається формулою

$$q = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^I q_i(x_1, x_2, t) \delta(x_1 - x_{1i}^0)(x_2 - x_{2i}^0) [\eta(t - t_{1i}) - (t - t_{2i})] .$$

Тут q_i – відбір газу з i – ої свердловини в момент часу t , $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака [2,3], $\eta(t - t_{ji})$ – одинична функція Хевісайда, p_{st} – значення атмосферного тиску в стандартних умовах ($p_{st} = 0,1033$ МПа, $T_A = 293$ К), z – коефіцієнт стисливості газу, для обчислення якого побудована значна кількість емпіричних формул на основі експериментальних даних, зокрема, [3]

$$z = \frac{1}{1+fp},$$

де $f = (24 - 0.21t^\circ C) \cdot 10^{-4}$, а $p(x_1, x_2, x_3, t)$ – тиск газу, який вимірюється ватмосферах.

Рівняння (1) є нелінійним за тиском. Вхідними даними для знаходження його розв’язку на практиці є заміряні значення тиску в робочих і замірних свердловинах та умова непроникності на границі. Враховуючи такі особливості та неканонічність області Ω_3 , аналітично розв’язати таке рівняння можна в часткових випадках.

Пласти підземних сховищ газу, як і родовищ, мають порівняно незначну товщину. Зміна тиску на такому перепаді висот є незначною і нею можна знехтувати.

Якщо розглядати розподіл тиску в області свердловини, то рівняння (1) доцільно записати в циліндричних координатах. Враховуючи, що область свердловини порівняно із всім сховищем є невеликою, параметри, які входять в рівняння (1), можна вважати сталими за координатою на деякому проміжку часу. За таких допущень рівняння фільтрації газу в циліндричних координатах буде мати вигляд [1]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{D}{p_0} \frac{\partial p}{\partial \tau}, \quad (2)$$

де r – радіус-вектор, проведений з центру свердловини, p_0 , p_2 – початкове значення тиску та значення тиску на границі області, за Лейбензоном

$$\tau = \frac{p_2}{p_0} t + \left(1 - \frac{p_2}{p_0}\right) \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta}, \quad \beta = \frac{p_0 k \lambda_m^2}{2m\mu}.$$

В літературі, як правило, при математичному моделювання використовують постійну усереднену товщину пласту. В природі товщина пласту є різною і її неврахування може привести як до неточного визначення дебету свердловини, так і неточного визначення балансових параметрів. Врахування перепаду тиску з висотою слід враховувати і при великих тисках. Тому актуальною є задача дослідження впливу товщини пласту на параметри роботи підземного сховища. В такому випадку доцільно область порового середовища, в якому міститься свердловина, описувати наступним диференціальним рівнянням [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} \right).$$

Ярослав П'янило, Ольга Іващенко, Ганна Лянце, Олександр Калиніченко, Анатолій Лопатьєв, Адріан Торський

Моделювання масопереносу в складних пористих середовищах

Тут позначено $\kappa = \frac{p_{00}}{D}$, $D = \frac{m\mu}{k}$, p_{00} – початкове значення тиску, k – усереднене значення проникності.

Метою роботи є дослідження впливу параметрів пористого середовища, особливо товщини, на розподіл тиску в циліндричній області із свердловиною в центрі.

Формулювання задачі. Будемо вважати, що на торцевих поверхнях немає стоку та поступлення газу, а на зовнішній поверхні циліндра тиск газу вважається сталими, рівним деякому значенню p_{00} . Тиск на внутрішній поверхні вважається заданим з врахуванням барометричного перепаду і визначається за значенням тиску на газозбірному пункті.

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді

$$p(r, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r, t) \cos \frac{n\pi x_3}{l}.$$

Коефіцієнти розкладу обчислюються за формулою

$$p_n(r, t) = \frac{1}{l} \int_0^l p(r, y, t) \cos \frac{n\pi y}{l} dy.$$

Використовуючи граничну умову, що немає стоку на торцях циліндра, тобто

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial x_3} \right|_{x_3=l} = 0,$$

інтегруваннями за частинами отримуємо формулу

$$p_n(r, t) = -\frac{l}{(n\pi)^2} \int_0^l p''_{x_3}(r, y, t) \cos \frac{n\pi y}{l} dy.$$

Якщо рівняння

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} \right)$$

домножимо на $\cos \frac{n\pi z}{l}$ і зінтегруємо від нуля до l , отримаємо

$$\frac{\partial p_n(r, t)}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p_n(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_n(r, t)}{\partial r} - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 p_n(r, t) \right).$$

Розв'язок останнього рівняння шукаємо у вигляді

$$p_n(r, t) = u_n(r) \exp(-\kappa \alpha_n^2 t).$$

Тоді

$$\frac{\partial p_n(r, t)}{\partial t} = -u_n(r) \kappa \alpha_n^2 \exp(-\kappa \alpha_n^2 t).$$

і для визначення функцій $u_n(r)$ отримується диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} + \eta_n u_n = 0,$$

де позначено

$$\eta_n^2 = \alpha_n^2 - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.$$

Будемо вважати, що на внутрішній та зовнішній границях циліндра мають місце граничні умови

$$p(a, x_3, t) = p_a(t)e^{-\sigma x_3}, \quad p(b, x_3, t) = p_b e^{-\sigma x_3}, \quad \sigma = \frac{2g}{zRT}.$$

Розклади в ряди цих умов мають вигляд:

$$p(a, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(a, t) \cos \frac{n\pi x_3}{l}, \quad p_n(a, t) = \frac{1}{l} \int_0^l p(a, y, t) \cos \frac{n\pi y}{l} dy,$$

$$p(b, x_3, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(b, t) \cos \frac{n\pi x_3}{l}, \quad p_n(b, t) = \frac{1}{l} \int_0^l p(b, y, t) \cos \frac{n\pi y}{l} dy.$$

Тоді

$$p_n(a, t) = u_{na} = \frac{p_a \sigma (1 - (-1)^n e^{-\sigma l})}{l \sigma^2 + (n\pi/l)^2},$$

та

$$p_n(b, t) = u_{nb} = \frac{p_b \sigma (1 - (-1)^n e^{-\sigma l})}{l \sigma^2 + (n\pi/l)^2}.$$

Коефіцієнти Фур'є для початкової умови знаходяться за формулою

$$p_n(r, 0) = \frac{1}{l} \int_0^l p(r, y, 0) \cos \frac{n\pi y}{l} dy$$

та при тиску $p(r, x_3, 0) = p_{00}$ буде

$$p_n(r, 0) = \frac{p_{00}}{l} \int_0^l \cos \frac{n\pi y}{l} dy = \frac{p_{00}}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{l} \Big|_0^l = 0.$$

За таких крайових умов розв'язок вихідної крайової задачі має вигляд

$$p_n(r, t) = \frac{u_{na} \ln(b/r) + u_{nb} \ln(r/a)}{\ln(b/a)} +$$

$$+ \pi \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{J_0(a\eta_{ni}) p_{00}}{J_0(a\eta_{ni}) + J_0(b\eta_{ni})} - \frac{\{u_{na} J_0(a\eta_{ni}) - u_{nb} J_0(b\eta_{ni})\} J_0(a\eta_{ni})}{J_0^2(a\eta_{ni}) - J_0^2(b\eta_{ni})} \right] \times$$

$$\times U_0(r\eta_{ni}) \exp(-\kappa \eta_{ni}^2 t)$$

Тут η_{ni} корінь рівняння

$$J_0(a\eta_n) Y_0(b\eta_n) - J_0(b\eta_n) Y_0(a\eta_n) = 0,$$

$$U_0(ar) = J_0(ar) Y_0(ab) - J_0(ab) Y_0(ar).$$

Останнє рівняння має безліч коренів. Якщо η_{ni} корінь рівняння, то

Моделювання масопереносу в складних пористих середовищах

$$\alpha_{ni} = \sqrt{\eta_{ni}^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}$$

Обчислювальний експеримент. Метою обчислювального експерименту було дослідження впливу параметрів пористого середовища, зокрема його висоти, пористості та коефіцієнта проникності, на розподіл тиску.

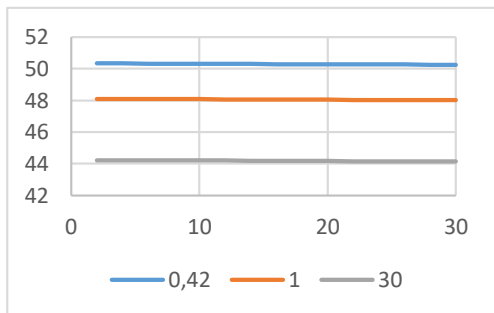


Рис. 1. Значення тиску на різних висотах на віддалі 200 м від свердловини при висоті порового середовища 30 м для різних часів (часи задано в добах).

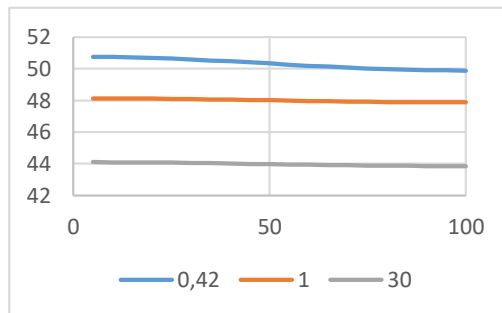


Рис.2. Значення тиску на різних висотах на віддалі 200 м від свердловини при висоті порового середовища 100 м для різних часів (часи задано в добах).

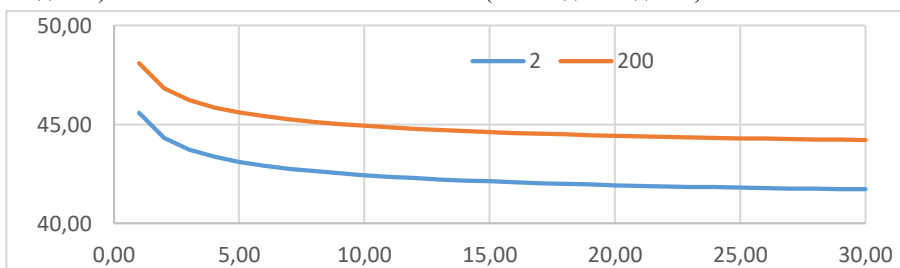


Рис. 3. Залежність тиску від часу на віддальх 2 та 200 метрів від свердловини для товщини шару 100 метрів (час задано в добах).

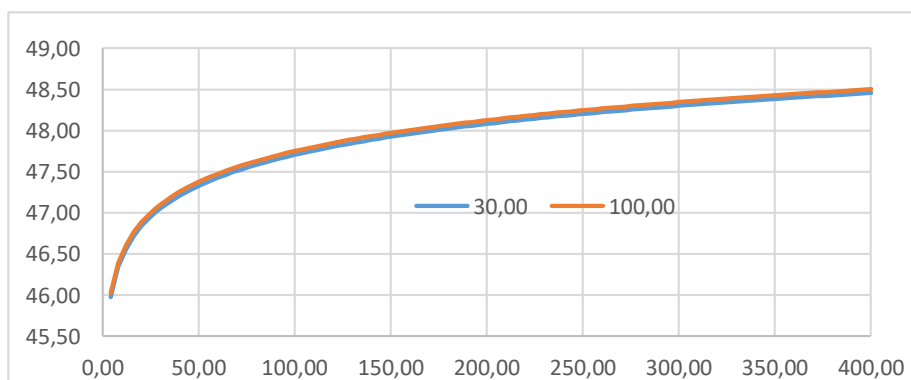


Рис.4. Залежність тиску від радіуса (в метрах) пористого середовища для різних значень висоти пористого середовища (синя лінія = 30 метрів, червона лінія – 100 метрів).

Висновки. Отримані результати дають можливість оцінювати розподіл тиску в складному пористому середовищі, що має форму пустотілого циліндра в залежності від радіуса та висоти циліндра. При цьому вважається, що розподіл тиску не залежить від кутової координати. З аналізу результатів слідує, що починаючи з деякої товщини середовища при моделюванні процесів масопереносу необхідно враховувати і залежність тиску від висоти (рис. 1-2). Очевидно, що на цю залежність впливає тиск речовини, що знаходиться в процесі фільтрації – чим більший тиск, тим більша і залежність. Вихід тиску на усталений режим не суттєво залежить від часу (рис.3). Поведінка зміни тиску від відділі до свердловини не суттєво залежить від висоти пористого середовища. Результати досліджень можуть бути використані для моделювання процесу фільтрації вуглеводнів в околах свердловин, моделювання розподілу тиску крові в м'яких тканинах живих організмів [4-6] тощо.

Для математичного моделювання процесу поширення крові в м'яких тканинах у літературі використовують два підходи:

- 1) моделювання руху крові по капілярах з урахуванням точок розгалуження;
- 2) моделювання м'яких тканин як пористих середовищ і трактування поширення крові як процесу фільтрації.

Гемодинамічні умови в капілярах характеризуються низьким тиском і малою швидкістю кровотоку. Різні органи мають різний рівень розвитку капілярної сітки. Наприклад, у шкірі на 1 мм^2 є 40 капілярів, а в м'язах – близько 1000. Оскільки параметри капілярів (довжина, діаметр та інші) практично не вдається визначити з необхідною для розрахунків точністю, перший підхід виявляється неефективним. Доцільніше моделювати рух крові в м'яких тканинах пористими середовищами, в яких роль пор відіграють капіляри, а поширення крові реалізується як процес фільтрації.

Останнім часом для моделювання процесу фільтрації в пористих середовищах застосовуються диференціальні рівняння в похідних дробових порядків як за часом, так і за координатами [7,9]. Зокрема рівняння (1) в дробових похідних за часом у декартовій системі координат буде мати вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{kh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{kh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{kh}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) = 2mh \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} + 2qp_{at} \right).$$

За Капутто дробову похідну порядку α визначено формулою [2,3]:

$$D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau,$$

де $\Gamma(1-\alpha)$ – гама-функція. Дробовою похідною Рімана–Ліувіля порядку α для функції $f(t)$, $t \in [a, b]$ називають вираз:

$$D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

Основними методами розв'язування крайових задач з використанням похідних дробових порядків є: аналітичний з використанням перетворення Лапласа; спектральні на базі класичних ортогональних многочленів; числові - на базі схеми Грюнвальда-Летнікова .

Література

1. И.А.Чарный Подземная гидрогазодинамика. М., 1963, 397 с.
2. П'янило Я. Д. Дослідження неусталеного руху газу в пористих середовищах // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – Вип. 2. – С. 178–184.
3. Притула Н. М., П'янило Я. Д., Притула М.Г. Підземне зберігання газу (математичні моделі та методи). – Львів: Ви-во “Растр-7”, 2015. – 266 с.
4. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. – Москва: Мир, 1981. – 624 с.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – Москва: Наука, 1978. – 736 с.
6. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. – Москва: Мир, 1983. – 400 с.
7. Pyanylo Ya., Bratash O., Pyanylo H/Solving of differential equations systems in the presence of fractional derivatives using the orthogonal polynomials. ММС. 2017; Volume 4, Number 1: pp. 87-95, <https://doi.org/10.23939/mmc2017.01.087>.
8. Lopuh N. B. Pyanylo Ya/D/ Mathematical modeling of the gas-filtration in the bottomhole zone of underground gas-storage wells using fractional derivatives Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2021. – 64, № 4 133–140.
9. Pyanylo Ya.D. Lopuh N. B. Numerical Model Analysis Of Atypical Gas Filtration In A Porous Medium Advanced Computer Information Technologies 2022, Publication Year: 2022,Pages:1 – 4. DOI: 10.1109/ACIT54803.2022.9913079.

Modeling of mass transfer in complex porous environments of cylindrical form.

Yaroslav Pyanylo, Olga Ivashchenko, Hanna Lyantse, Oleksandr Kalinichenko, Anatolij Llopatiev, Adrian Torskyi

In the work, a mathematical model of mass transfer in a complex porous medium, which has the form of a hollow cylinder of a given height, is constructed. The influence of the parameters of the porous medium on the process of pressure distribution was studied.

Отримано 12.07.22.