

Напружено-деформований стан пластини з тріщиною та колінеарною щілиною за згину на пружній основі

Тарас Даляк¹, Микола Маковійчук²

¹ к. ф.-м. н., доцент, лабораторія моделювання демпфуючих систем ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитиницька, 3, Івано-Франківськ, 76000, e-mail: tdalyak@gmail.com

² к. ф.-м. н., доцент, лабораторія моделювання демпфуючих систем ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитиницька, 3, Івано-Франківськ, 76000, e-mail: makoviy@ua.fm

У двовимірній постановці розглянуто задачу про взаємодію двох колінеарних дефектів – тріщини, здатної до закриття, та щілини, береги якої не контактують – під час згину пластини на пружній основі Вінклера. Закриття тріщини описано з використанням моделі контакту вздовж лінії в лицьовій поверхні пластини. Під щілиною мається на увазі розріз з вільними від напружень поверхнями, на якому, у прийнятій постановці задачі, допускається від’ємний стрибок переміщень у зоні стискаючих напружень. Задачу розв’язано за допомогою методу сингулярних інтегральних рівнянь та числового методу квадратур. Обчислено коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів у внутрішніх та зовнішніх вершинах тріщини і щілини. Досліджено розподіл контактної реакції на лінії тріщини, а також вплив пружної основи, взаємодії дефектів та контакту берегів тріщини на напружено-деформований стан пластини.

Ключові слова: пластини, пружна основа, тріщина, щілина, колінеарні дефекти, згин, закриття тріщини.

Вступ. Розрахунок розподілу напружень у тонкостінних елементах конструкцій, що знаходяться на пружній основі і мають різного роду дефекти чи конструктивні розрізи, представляє значний інтерес для будівельної, машинобудівної та нафтогазової галузей промисловості. Зазвичай такі дослідження проводились без урахування контактної взаємодії поверхонь дефектів у зоні стискаючих напружень [1–5]. Однак, як показують пізніші дослідження [6–10], врахування явища контакту берегів є принциповим для уникнення фізичних суперечностей, пов’язаних з перекриттям берегів розрізів під дією згинальних навантажень, а також для отримання більш якісної оцінки напружено-деформованого стану в околі вершин тріщин. Крім того, цікавими є задачі про взаємодію дефектів із заданими змішаними крайовими умовами контакту та вільного краю на контурах розрізів [11, 12]. Мета цієї роботи полягає у дослідженні взаємовпливу двох колінеарних дефектів – тріщини, здатної до закриття, та щілини, береги якої не контактують – на напружено-деформований стан пластини під час згину на пружній основі. Окремі результати даної роботи прозвучали в доповіді [13], а аналогічні дослідження для невідкритої пружної основою пластини здійснено раніше у статті [14].

1. Постановка задачі.

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$, підкріплену пружною основою Вінклера і послаблену двома прямолінійними наскрізними розрізами

завдовжки $2l$, розташованими на відстані $2d$ вздовж осі абсцис (рис. 1). На одному з дефектів допускаємо змикання берегів, яке описуємо з використанням моделі контакту вздовж лінії [6–8]. Надалі такий дефект називатимемо контактною тріщиною. На іншому ж розрізі взаємодію берегів не враховуємо і називаємо його щілиною. Дану термінологію прийнято і обґрунтовано в роботах [11, 12, 14]. До обох берегів дефектів прикладено самоврівноважені, рівномірно розподілені згинальні моменти $m = \text{const}$. Дослідимо взаємодію дефектів і вплив пружної основи на напружено-деформований стан пластини з урахуванням закриття одного з дефектів (тріщини), спричиненого деформацією згину.

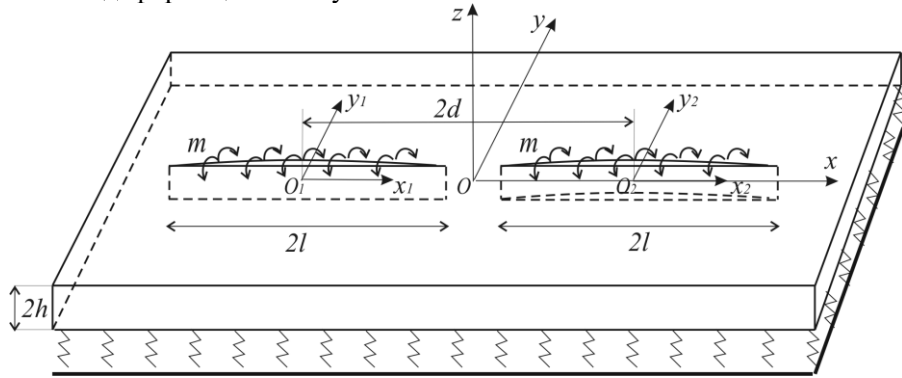


Рис. 1. Тріщина з колінеарною щілиною у пластині на пружній основі

Врахування контакту берегів на тріщині за згину порушує антисиметрію полів напружень по товщині у всій пластині. Для врахування цього ефекту антисиметричне по товщині поле згинних напружень в околі тріщини доповнюємо полем напружень плоского напруженого стану, викликаного взаємодією протилежних берегів тріщини. Таким чином, напружений стан ззовні дефектів описуємо бігармонічним рівнянням плоского напруженого стану та рівнянням класичної теорії згину пластини на пружній основі Вінклера:

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \quad D\Delta\Delta w + kw = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L$$

Тут φ – функція напружень, w – прогин пластини; $D = 2Eh^3 / (3(1-\nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона її матеріалу; k – коефіцієнт постелі; Δ – оператор Лапласа; L – сукупність розрізів.

Залежно від типу дефекту запишемо у локальних системах координат крайові умови на розрізах [14]:

на тріщині задаємо умови контакту по всій довжині

$$\begin{aligned} [u_{y_1}](x_1) = h |[\theta_{y_1}](x_1)| > 0, \quad M_{y_1}(x_1, 0) = -m + h N_{y_1}(x_1, 0) \operatorname{sgn}[\theta_{y_1}](x_1), \\ N_{y_1}(x_1, 0) < 0, \quad x_1 \in (-l, l). \end{aligned} \quad (1)$$

на щілині приймаємо умови вільного краю

$$N_{y_2}(x_2, 0) = 0, \quad M_{y_2}(x_2, 0) = -m, \quad x_2 \in (-l, l); \quad (2)$$

На безмежності напруження відсутні:

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0; \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0; \quad Q_x^* = Q_y^* = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

У формулах (1), (2) $[u_y]$ – розкриття тріщини в серединній поверхні оболонки, $[\theta_y]$ – розрив кута повороту нормалі; N_x , N_{xy} , N_y – мембранні зусилля, M_x , M_{xy} , M_y – моменти, Q_x^* , Q_y^* – узагальнені поперечні сили.

2. Інтегральні рівняння задачі.

Розв'язок сформульованої задачі (1)–(3) будували методом сингулярних інтегральних рівнянь. Запишемо інтегральні подання сил та моментів на розрізах через похідні від стрибків переміщення і кута повороту нормалі [3–5]:

$$N_{y_n}(x_n) = \frac{B}{4\pi} \left(\int_{-l}^l K_{11}(\xi - x_n) [u_{y_n}]'(\xi) d\xi + \int_{-l}^l K_{11}(\xi - x_n - (-1)^k 2d) [u_{y_k}]'(\xi) d\xi \right),$$

$$M_{y_n}(x_n) = -\frac{D}{4\pi} \left(\int_{-l}^l K_{33}(\xi - x_n) [\theta_{y_n}]'(\xi) d\xi + \int_{-l}^l K_{33}(\xi - x_n - (-1)^k 2d) [\theta_{y_k}]'(\xi) d\xi \right),$$

$$n, k = 1, 2; \quad n \neq k. \quad (4)$$

Тут

$$K_{11}(z) = \frac{1}{z}, \quad K_{33}(z) = \frac{2(1-\nu)^2}{z} \left(\frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{kei}'(\gamma|z|) - \operatorname{ker}(\gamma|z|) \right) -$$

$$-2(1-\nu^2)\gamma \operatorname{sgn} z \operatorname{ker}'(\gamma|z|) - 2\gamma^2 \int_0^z \operatorname{kei}(\gamma|z|) dz;$$

$B = 2Eh$, $\gamma = (k/D)^{1/4}$, $\operatorname{ker}(\dots)$, $\operatorname{kei}(\dots)$ – функції Кельвіна.

Після підстановки інтегральних зображень (4) у крайові умови (1), (2) отримали систему сингулярних інтегральних рівнянь задачі:

$$[u_{y_1}]'(x_1) = h [\theta_{y_1}]'(x_1) \operatorname{sgn}[\theta_{y_1}](x_1),$$

$$\frac{B}{4\pi} \left(\int_{-l}^l K_{11}(\xi - x_1) [u_{y_1}]'(\xi) d\xi + \int_{-l}^l K_{11}(\xi - x_1 + 2d) [u_{y_2}]'(\xi) d\xi \right) \operatorname{sgn}[\theta_{y_1}](x_1) +$$

$$+ \frac{D}{4\pi} \left(\int_{-l}^l K_{33}(\xi - x_1) [\theta_{y_1}]'(\xi) d\xi + \int_{-l}^l K_{33}(\xi - x_1 + 2d) [\theta_{y_2}]'(\xi) d\xi \right) = m, \quad x_1 \in (-l, l).$$

$$\frac{B}{4\pi} \left(\int_{-l}^l K_{11}(\xi - x_2) [u_{y_2}]'(\xi) d\xi + \int_{-l}^l K_{11}(\xi - x_2 - 2d) [u_{y_1}]'(\xi) d\xi \right) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{D}{4\pi} \left(\int_{-l}^l K_{33}(\xi - x_2) [\theta_{y_2}]'(\xi) d\xi + \int_{-l}^l K_{33}(\xi - x_2 - 2d) [\theta_{y_1}]'(\xi) d\xi \right) = m, \quad x_2 \in (-l, l);$$

Зауважимо, що тут $\operatorname{sgn}[\theta_{y_1}] = \operatorname{sgn}[\theta_{y_2}] = -\operatorname{sgn} m$ **Помилка! Джерело посилання не знайдено..**

Розв'язки системи рівнянь (5) слід ще підпорядкувати додатковим умовам на кінцях розрізів.

$$\int_{-l}^l u_{y_n}(\xi) d\xi = 0, \quad \int_{-l}^l [\theta_{y_n}]'(\xi) d\xi = 0, \quad (n=1, 2). \quad (6)$$

3. Аналіз результатів.

Числові розв'язки задачі (5), (6) отримали методом квадратур при $\nu=0.3$. Для контактної тріщини за знайденим розв'язком та першою із формул (1) визначали її розкриття, відтак, скориставшись поданням (4), обчислювали контактну реакцію.

Коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів у внутрішніх та зовнішніх вершинах дефектів обчислювали за формулами:

$$K_N^\pm = \mp \frac{B}{4\sqrt{l}} \lim_{x_n \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x_n^2} [u_y]'(x_2),$$

$$K_M^\pm = \pm(3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4\sqrt{l}} \lim_{x_n \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x_n^2} [\theta_y]'(x_n); \quad n=1, 2.$$

Залежності безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від параметра взаємного розташування дефектів $\rho = l/d$ будували для внутрішніх і зовнішніх вершин тріщини і щілини при фіксованих значеннях параметра пружної основи $\lambda = \gamma l = l(k/D)^{1/4}$ (рис. 2).

Як видно з побудованих графіків, врахування закриття тріщини зумовлює появу ненульових K_N щілини, та зменшення темпу зростання K_M у ближчому до тріщини вістрі щілини, порівняно з класичним випадком для двох щілин у пластині на пружній основі [10]. У свою чергу, відсутність контактної взаємодії берегів щілини ніяк не впливає на рівень інтенсивності напружень на контактній тріщині, який залишається таким же, як і у випадку взаємодії двох тріщин, здатних до закриття [10]. Збільшення жорсткості основи призводить до зменшення коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів для обох дефектів.

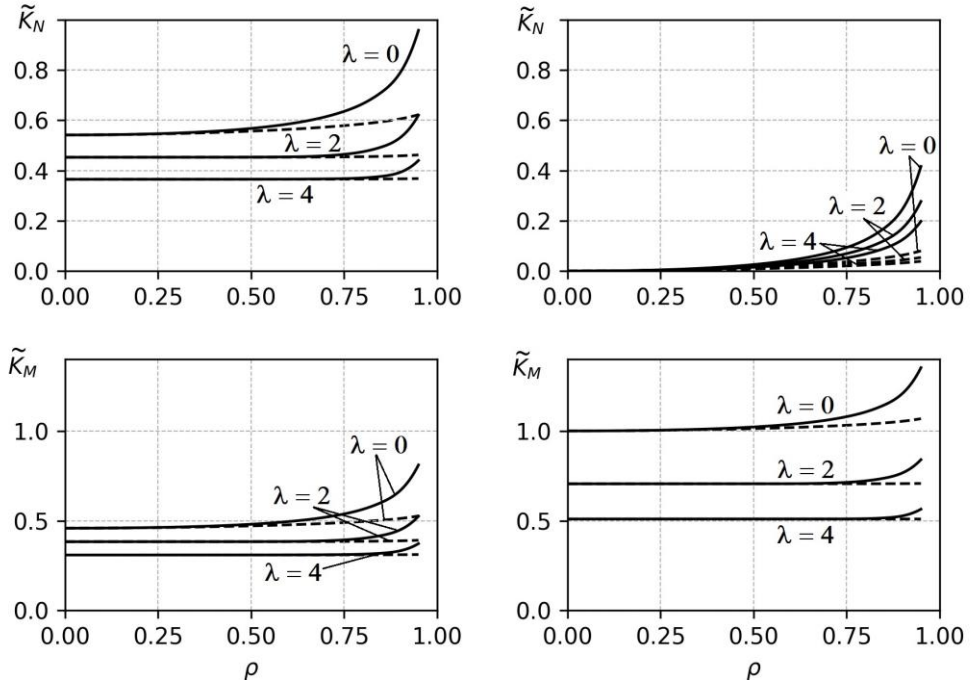


Рис. 2. Коефіцієнти інтенсивності зусиль $\tilde{K}_N = hK_N / (|m| \sqrt{l})$ та моментів $\tilde{K}_M = K_M / (m\sqrt{l})$ для тріщини (ліворуч) та щілини (праворуч); суцільні лінії відповідають внутрішнім вершинам дефектів, а штрихові – зовнішнім.

Результати обчислення контактної зусилля для тріщини подані на рис. 3. Як видно з рисунка, із зростанням жорсткості основи контактне зусилля послаблюється, а також нівелюється вплив щілини на зростання величини реакції у внутрішній вершині тріщини (при $x_1 \rightarrow l$). Тож для досить жорсткої основи залежність контактної взаємодії від ρ стає незначна, зокрема, вже при $\lambda \geq 2$ графіки контактної реакції для $\rho = 0$ та $\rho = 0.5$ фактично співпадають. Також із зростанням параметра λ розподіл контактної реакції вздовж тріщини стає немонотонним.

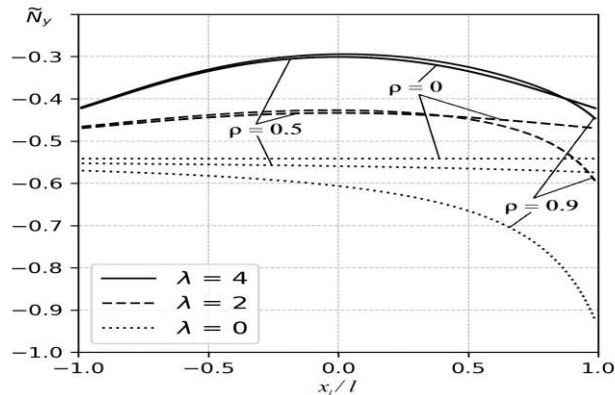


Рис. 3. Розподіл безрозмірної контактної реакції вздовж зімкнутих берегів тріщини

У граничних випадках отримані результати збігаються з уже отриманими раніше. Так при $\rho=0$ отримуємо окремі результати для ізольованих дефектів тріщини або щілини у пластині на пружній основі [9], а при $\lambda=0$ – розв’язок задачі для тріщини з колінеарною щілиною у вільній від в’язей пластині [14][7].

Отримані результати досліджень дозволяють здійснювати порівняльний аналіз напружено-деформованого стану та ефективніше оцінювати несучу здатність тонкостінних елементів конструкцій, що розміщені на пружній основі і мають різного типу дефекти – як здатні до закриття унаслідок згину, так і з вільними від напружень краями.

Висновки.

Досліджено вплив взаємодії колінеарних дефектів – контактної тріщини та щілини з вільними краями на напружено-деформований стан пластини за згину на пружній основі Вінклера. У результаті встановлено:

1. Контакт берегів тріщини призводить до появи ненульових коефіцієнтів інтенсивності мембранних сил щілини, та зменшення темпу зростання коефіцієнтів інтенсивності моментів у ближній до тріщини вершині щілини, порівняно з класичним випадком взаємодії двох щілин у пластині на пружній основі. Однак, відсутність контакту берегів у щілині ніяк не впливає на напружено-деформований стан на тріщині, який залишається таким же, як і у випадку взаємодії двох контактних тріщин.

2. Із зростанням жорсткості основи контактне зусилля послаблюється, а також зменшується вплив щілини на зростання величини реакції у вершині тріщини, ближчої до щілини. Крім того, із збільшенням параметра жорсткості основи розподіл контактної реакції вдовж тріщини стає немонотонним.

Література

- [1] *Ang D. D., Foliass E. S., Williams M. L.* The bending stress in a cracked plate on an elastic foundation // *ASME. J. Appl. Mech.* – 1963. – V. 30, № 2. – P. 245–251.
- [2] *Foliass E. S.* On a plate supported by an elastic foundation and containing a finite crack // *Int. J. Fract.* – 1970. – V. 6. P. 257–263.
- [3] *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
- [4] *Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
- [5] *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
- [6] *Шацький І. П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* – 1988. – №7. – С. 49 – 51.
- [7] *Шацький І. П.* Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1990. – Т. 26, № 3. – С. 70–75.
- [8] *Young M. J., Sun C. T.* Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution // *Intern. J. Fract.* – 1992. – V 55. – P. 81–93.
- [9] *Шацький І. П., Маковійчук М. В.* Контактна взаємодія берегів тріщини під час згину пластини на пружній основі // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2003. – Т. 39, № 3. – С. 59–62.

- [10] Шацький І. П., Маковійчук М. В. Змикання берегів колінеарних тріщин при згині пластини на пружній основі // *Машинознавство*. – 2004. – № 6. – С. 10–12.
- [11] Даляк Т. М. Про взаємодію тріщин з щілинами при згині пластинки // *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій* (вип. 2): В 3-х т. / Під заг. ред. Панасюка В.В. – Львів : Каменяр, 1999. – Т. 2. – С. 269–272.
- [12] Шацький І. П., Даляк Т. М. Про закриття тріщин, з'єднаних зі щілинами, в зігнутий пластині // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 24–30.
- [13] Микола Маковійчук, Тарас Даляк. Взаємодія тріщини з колінеарною щілиною за згину пластини на пружній основі // 6-а Міжнародна науково-технічна конференція «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій». Тези доп. – Львів, 2018. – С. 53 – 54.
- [14] Шацький І. П., Даляк Т. М. Взаємодія тріщини з колінеарною щілиною за згину пластини // *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. – 2015. – № 1. – С. 211–218.

Stress-strain state of a plate with a crack and a collinear slot in the bending on an elastic foundation

Taras Dalyak, Mykola Makoviychuk

The problem of the interaction of two collinear defects - a closure-capable crack and a slot whose edges do not contact in the bending process of a plate on an elastic Winkler base is considered in the two-dimensional formulation. Crack closure is described using the contact model along a line in the facial surface of the plate. By the slot, we mean a section with stress-free surfaces, on which, in the accepted problem formulation, a negative jump of displacements in the zone of compressive stresses is allowed. The problem was solved using the method of singular integral equations and the numerical method of quadrature. The coefficients of the intensity of forces and moments in the inner and outer vertices of the crack and the slot were calculated. The distribution of the contact reaction along the crack line as well as the influence of the elastic base, the interaction of defects, and the contact of the crack edges on the stress-strain state of the plate, were studied.

Отримано 08.06.22