УДК 518.25

Розв'язування матричних поліноміальних рівнянь вкладеними ланцюговими дробами

Микола Недашковський

доктор фізико-математичних наук, професор, ЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів, m.nedashkovskyy@gmail.com

В роботі пропонується новий підхід для розв'язання матричних поліноміальних рівнянь загального вигляду із матричними та векторними невідомими. В основі лежить матричне узагальнення формули Ейлера, яка встановлює зв'язок між рядами і ланцюговими дробами. Отримане узагальнення дозволило створити єдину ітераційну схему обчислень, котру можна застосовувати як до поліноміальних матричних рівнянь $n-$ го порядку канонічного вигляду, так і неканонічнихрівнянь. Причому це стосується, як рівнянь із матричними, так і з векторними невідомими. В рамках підходу вдається також записати аналітичні розвинення розв'язку матричних рівнянь вкладеними ланцюговими дробами. Вкладені ланцюгові дроби - це досить маловивчена різновидність ланцюгових дробів, утворена композицією скінчених ланцюгових дробів, частинні чисельники яких в свою чергу є ланцюговими дробами.

Ключові слова:матричні поліноміальні рівняння, вкладені ланцюгові дроби.

Вступ. Пропонується схема розв'язання матричних поліноміальних рівнянь виду

$$\sum_{i=0}^{n} A_i X^i = 0 \tag{1}$$

та рівнянь неканонічного типу

$$\sum_{i=0}^{n} X^i A_i = 0, \tag{2}$$

де $A_i \in R^{m\times m}$ $(i=0,1,..n)$ та $X \in R^{m\times m}$ є квадратними матрицями. Розглянуто також рівняння (1) із векторними невідомими $(x_1^i \quad x_2^i \quad \dots \quad x_m^i)^T$ $(i=0,1,...,n)$, яке зустрічається в багатьох важливих економіко-математичних моделях. Для розв'язання описаних задач застосовано відносно маловивчений апарат вкладених ланцюгових дробів (ВЛД). Хоча подібна потреба виникала іще кілька десятиліть тому, ВЛД не привертали такої уваги як звичайні ланцюгові дроби [5, 6] та їх узагальнення – гіллясті ланцюгові дроби [1, 4]. Матричні [3] ВЛД одержуються композицією

$$w = P_1 w\left(Q_1 + R_1 w + \ldots + P_m w(Q_m + R_m W)^{-1} S_m w\ldots\right)^{-1} S_1 w \tag{3}$$

Тут $P_i, Q_i, R_i, S_i \forall\ i=\overline{1,m}$ - квадратні матриці.

1. Розв'язання матричних поліноміальних рівнянь загального вигляду

Для рівняння (1) шляхом еквівалентних перетворень можна записати

$$X = -A_1^{-1} A_1 \left(A_n X^{n-1} + A_{n-1} X^{n-2} + \ldots + A_2 X + A_1 \right)^{-1} A_0 =$$

$$= -A_1^{-1} \left(E - \left(E + A_1 \left(\left(A_n X^{n-2} + A_{n-1} X^{n-3} + .. + A_2 \right) X \right)^{-1} \right)^{-1} \right) A_0 =$$

$$= -A_1^{-1} \left(E - \left(X A_1^{-1} + A_n X^{n-2} + A_{n-1} X^{n-3} + .. + A_2 \right)^{-1} \right)^{-1} X A_1^{-1} \right) A_0$$

Продовжуючи далі подібні перетворення, одержуємо

$$X = -A_1^{-1} \Bigg(E - \Bigg(X A_1^{-1} + A_2^{-1} \Bigg(E - \Bigg(X A_2^{-1} + A_3^{-1} \Bigg(E - \Bigg(X A_3^{-1} + \\ + \ldots + A_{n-2}^{-1} \left(E - \left(X A_{n-2}^{-1} + \left(A_n X + A_{n-1} \right)^{-1} E \right)^{-1} X A_{n-2}^{-1} \right) E \Bigg)^{-1} \times \\ \times \ldots \times E \Bigg)^{-1} X A_3^{-1} \Bigg) E \Bigg)^{-1} X A_2^{-1} \Bigg) E \Bigg)^{-1} X A_1^{-1} \Bigg) A_0 \tag{4}$$

На основі (6) отримується рекурентна формула для обчислення розв'язку (1)

$$X_{k+1} = -A_1^{-1} \Bigg(E - \Bigg(X_k A_1^{-1} + A_2^{-1} \Bigg(E - \Bigg(X_k A_2^{-1} + A_3^{-1} \Bigg(E - \Bigg(X_k A_3^{-1} + \\ + \ldots + A_{n-2}^{-1} \left(E - \left(X_k A_{n-2}^{-1} + \left(A_n X_k + A_{n-1} \right)^{-1} E \right)^{-1} X_k A_{n-2}^{-1} \right) E \Bigg)^{-1} \times \\ \times \ldots \times E \Bigg)^{-1} X_k A_3^{-1} \Bigg) E \Bigg)^{-1} X_k A_2^{-1} \Bigg) E \Bigg)^{-1} X_k A_1^{-1} \Bigg) A_0 \tag{5}$$

2. Розв'язання матричних поліноміальних рівнянь неканонічного вигляду

Аналогічно і для рівняння (2)шляхом перетворень одержуємо

$$X = -A_0 \left(X^{n-1} A_n + X^{n-2} A_{n-2} + \ldots + X A_2 + A_1 \right)^{-1} A_1 A_1^{-1} =$$

$$= \text{-} A_0 \left(E - A_1^{-1} X \left(A_1^{-1} X + \left(X^{n-2} A_n + X^{n-3} A_{n-1} + \ldots + X A_3 + A_2 \right)^{-1} \right)^{-1} \right) A_1^{-1}$$

І далі перетворюючи поліноми нижчого порядку подібним чином отримаємо

$$X = -A_0 \Bigg(E - A_1^{-1} X \Bigg(A_1^{-1} X + \Bigg(E - A_2^{-1} X \Bigg(A_2^{-1} X + \ldots + \\ + \left(E - A_{n-2}^{-1} X \left(\left(A_{n-2}^{-1} X + \left(X A_n + A_{n-1} \right)^{-1} \right)^{-1} \right) .. A_2^{-1} \right)^{-1} \Bigg)^{-1} \Bigg) A_1^{-1} \tag{6}$$

Використовуючи (6) одержуємо рекурентну формулу для обчислення розв'язку (2)

$$X_{k+1} = -A_0 \Bigg(E - A_1^{-1} X_k \Bigg(A_1^{-1} X_k + \Bigg(E - A_2^{-1} X_k \Bigg(A_2^{-1} X_k + \ldots + \\ + \left(E - A_{n-2}^{-1} X_k \left(\left(A_{n-2}^{-1} X_k + \left(X_k A_n + A_{n-1} \right)^{-1} \right)^{-1} \right) \ldots A_2^{-1} \right)^{-1} \Bigg)^{-1} \Bigg) A_1^{-1} \tag{7}$$

3. Матричне поліноміальне рівняння з векторними невідомими

Введемо до розгляду матричне рівняння

$$\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} a_{i,1,1} & a_{i,1,2} & \dots & a_{i,1,m} \\ a_{i,2,1} & a_{i,2,2} & \dots & a_{i,2,m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{i,m,1} & a_{i,m,2} & \dots & a_{i,m,m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \dots \\ x_m^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{0,1} \\ a_{0,2} \\ \dots \\ a_{0,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

До розв'язання (8) приводить пряма нелінійна балансова модель міжгалузевої еколого-економічної взаємодії тадвоїста до неї модель відносно цін, якібуло розглянуто в роботі В.С.Григорківа [2]. До подібного рівняння можна прийти і при наближеному розв'язанні нелінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду із нелінійністю довільного порядку.Рівняння (8) можна також подати у виді

$$A_n diag(X)^{n-1} X + A_{n-1} diag(X)^{n-2} X + \ldots + A_1 X + A_0 = 0 \tag{9}$$

На основі нескладного перетворення

$$X = -A_1^{-1} A_1 \left(A_n diag(X)^{n-1} + A_{n-1} \cdot diag(X)^{n-2} + A_2 diag(X) + A_1 \right)^{-1} A_0 =$$

$$= -A_1^{-1}\left(E - \left(E + A_1 diag(X)^{-1}\left(A_n diag(X)^{n-2} + A_{n-1} diag(X)^{n-3} + .. + A_2 \right)^{-1} \right)^{-1} \right) A_0 =$$

$$= -A_1^{-1}\left(E - \left(diag(X) A_1^{-1} + \left(\sum_{i=2}^{n} A_i diag(X)^{i-2} \right)^{-1} \right)^{-1} diag(X) A_1^{-1} \right) A_0$$

Продовжуючи цей процес далі та вкладаючи одержані вирази одержуємо наступне розвинення Xу ланцюговий матричний дріб

$$X = -A_1^{-1}\Big(E - \Big(diag(X)A_1^{-1} + A_2^{-1}\Big(E - \Big(diag(X)A_2^{-1} + A_3^{-1}\Big(E - \Big(diag(X)A_3^{-1} +$$

$$+ \ldots + A_{n-2}^{-1}\left(E - \left(diag(X) A_{n-2}^{-1} + \left(A_n diag(X) + A_{n-1} \right)^{-1} E \right)^{-1} diag(X) A_{n-2}^{-1} \right) E \right)^{-1} \times \tag{10}$$

$$\times \ldots \times E\Big)^{-1} diag(X) A_3^{-1}\Big) E\Big)^{-1} diag(X) A_2^{-1}\Big) E\Big)^{-1} diag(X) A_1^{-1}\Big) A_0$$

Із використанням композиції (10) одержується рекурентна формула для наближеного обчислення розв'язку рівняння (8)

$$X_{k+1} = -A_1^{-1}\Big(E - \Big(diag(X_k)A_1^{-1} + A_2^{-1}\Big(E - \Big(diag(X_k)A_2^{-1} + A_3^{-1}\Big(E - \Big(diag(X_k)A_3^{-1} +$$

$$+ \ldots + A_{n-2}^{-1}\Big(E - \Big(diag(X_k)A_{n-2}^{-1} + \left(A_n diag(X_k) + A_{n-1}\right)^{-1} E\Big)^{-1} diag(X_k) A_{n-2}^{-1}\Big) E\Big)^{-1} \times$$

$$\times \ldots \times E\Big)^{-1} diag(X_k) A_3^{-1}\Big) E\Big)^{-1} diag(X_k) A_2^{-1}\Big) E\Big)^{-1} diag(X_k) A_1^{-1}\Big) A_0$$

Приклад 1. Розглянуто конкретне рівняння (1) 3-го порядку зкоефіцієнтами

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1.0 & 1.1 & -1.3 \\ -3.6 & 0.7 & -3 \\ 1.2 & 1.3 & 11 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} -12.0 & 11 & -13 \\ -16 & 0.7 & -3 \\ 12 & 13 & 11 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 9 & -1.03 & -13 \\ -12 & -4 & 3 \\ 20.2 & 0.3 & -0.01 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} -9 & 1.0 & 3 \\ 2.0 & 4 & 3 \\ 0.2 & 0.3 & -1 \end{pmatrix}.$$

При початковому наближенні $X_0 = 0$ за рекурентною формулою

$$X = -A_1^{-1}\left(E - \left(XA_1^{-1} + E(A_3X + A_2)^{-1}\right)^{-1} XA_1^{-1}\right)A_0$$

в середовищі MatLab одержано наближений розв'язок

$$x_k = \begin{pmatrix} -0.2123 & 0.0341 & -0.1625 \\ -0.0281 & -0.0968 & -0.5277 \\ 0.1101 & -0.0323 & -0.3367 \end{pmatrix}$$

Результати обчислювального експерименту

$\frac{\|X_{k+1} - X_k\|}{\|X_k\|}$	7.11e-02	2.73e-03	2.28e-05	1.66e-07	3.24e-09	2.35e-11	171e-13
Ітерації	3	6	11	16	20	25	30

Приклад 2. Розв'язувалося неканонічне рівняння (2) 3-го порядку з коефіцієнтами

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1.0 & 1.1 & -1.3 \\ -3.6 & 0.7 & -3 \\ 1.2 & 1.3 & 1.0 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} -12.0 & 11 & -13 \\ 16 & 0.7 & -3 \\ 12 & 13 & 11.0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 9 & -1.0 & 3 \\ 12 & -4 & 3 \\ 20.3 & 0.3 & -0.01 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} -9 & 1.0 & 3 \\ 2.0 & 4 & 3 \\ 0.2 & 0.3 & -1 \end{pmatrix}.$$

При початковому наближенні $X_0 = 0$ за рекурентною формулою

$$X_{k+1} = -A_0\left(E - A_1^{-1}X_k\left(A_1^{-1}X_k + \left(X_kA_3 + A_2\right)^{-1}\right)^{-1}\right)A_1^{-1}$$

в середовищі MatLab одержано наближений розв'язок

$$x_k = \begin{pmatrix} -0.1024 & 0.0177 & 0.0006 \\ -0.1484 & -0.0782 & 0.0680 \\ 0.5650 & -0.4716 & -0.4651 \end{pmatrix}.$$

Результати числового експерименту

$\frac{\|X_{k+1} - X_k\|}{\|X_k\|}$	3.79e-01	1.81e-03	2.37e-05	3.09e-07	4.03e-09	5.25e-11	2.31e-13
Ітерації	4	9	13	17	21	26	30

Приклад 3. Розв'язувалося рівняння виду (8) третього порядку з коефіцієнтами

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ A_2 \begin{pmatrix} 2.1 & -3.2 & 5.2 \\ 2.2 & 2.51 & 0.25 \\ 2 & -2.34 & -1.13 \end{pmatrix};\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 0.25 & 2.2 & 0.251 \\ 2.34 & -1.3 & 0.22 \end{pmatrix};\ A_0 = \begin{pmatrix} 32.8555 \\ -9.3837 \\ -8.4959 \end{pmatrix}$$

При початковому наближенні $x_0 = (-1.2 \quad 5.04 \quad 11.38)^T$ за рекурентною формулою

$$X_{k+1} = -A_1^{-1}\left(E - \left(diag(X_k)A_1^{-1} + E\left(A_3 diag(X_k) + A_2\right)^{-1}\right)^{-1} diag(X_k)A_1^{-1}\right)A_0$$

у середовищі MatLab одержано наближений розв'язок $x_k = (0.3673 \quad 0.9211 \quad 2.2406)^T$

Результати обчислень

$\dfrac{\lVert X_{k+1} - X_k \rVert}{\lVert X_k \rVert}$	7.33e-01	2.72e-03	8.87e-05	3.82e-07	4.83e-09	4.22e-11	2.7e-13
Ітерації	16	25	39	52	65	75	91

Висновки. Отже, запропоновано новий достатньо загальний підхід для розв'язання матричних поліноміальних рівнянь $n-$го порядку із матричними та векторними невідомими. Його ефективність ілюструється результатами наведених числових експериментів в середовищі MatLab.

Література

[1] *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби.-К.:Наукова думка,1986.-176 с.

[2] *Григорків В. С.* Моделювання еколого-економічної взаємодії: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2007. – 84 с.

[3] *Недашковський М. О.* Ознаки збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів. Математичні методи та фізико-механічні поля. Львів, 2003, том 46, №4, с.50-56.

[4] *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике.-М.:Наука,1983.-311 с.

[5] *L.Lorentzen, H.* Waadeland Continued fractions with applications. Amsterdam: Elsevier Publishers B.V.,1992 - 606 p.

[6] *W.B.Jones, W.J.Thron*. Continued fractions: analytic theory and applications, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 11, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1980,428p.

Solving matrix polynomial equations with nested continued fractions

Mykola Nedashkovskyy

A new general approach for solving matrix polynomial equations of arbitrary order with matrix or vector unknowns is proposed in the work with the use of nested continued fractions.

Отримано 26.02.21