

## Моделювання пружного поля, розсіяного міжфазним дефектом

Зіновій Назарчук<sup>1</sup>, Мирон Войтко<sup>2</sup>, Ярослав Кулинич<sup>3</sup>, Дозислав Куриляк<sup>4</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м н., професор, академік НАН України, Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, вул. Наукова, 5, 79060, Львів, e-mail: zinoviy.nazarchuk@gmail.com

<sup>2</sup> к. ф.-м н., Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, вул. Наукова, 5, 79060, Львів, e-mail: myron.voytko@gmail.com

<sup>3</sup> к. т. н., Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, вул. Наукова, 5, 79060, Львів, e-mail: jkulynych@i.ua

<sup>4</sup> д. ф.-м н., професор, Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, вул. Наукова, 5, 79060, Львів, e-mail: kuryliak@pancha.lviv.ua

*Розв'язано задачу дифракції пружної SH-хвилі на міжфазному дефекті, утвореному на межі жорсткого з'єднання шару з півпростором. Дефект моделюємо імпедансною півплощиною. Крайову задачу розв'язано методом Вінера-Гопфа. В аналітичному вигляді отримано формули для знаходження поля зміщень та коефіцієнтів відбивання/проходження. Наведено приклади числового моделювання характеристик поля.*

**Ключові слова:** пружний шар; дефект; жорстке з'єднання; імпеданс; нормальна SH-хвиля; метод Вінера-Гопфа

**Вступ.** Прогнозування надійної роботи інженерних конструкцій з композитних матеріалів та їх з'єднань зумовлює інтерес до розвитку методів їх діагностування. Для виявлення міжфазних дефектів, використовують інформаційні сигнали, породжені взаємодією пружних полів з неоднорідностями матеріалу. Їх складна залежність від конструктивних та фізико-механічних параметрів, значні часові та матеріальні затрати, необхідні для проведення натурних експериментів, перетворюють математичне моделювання на невід'ємний етап проектування нових технічних засобів контролю. Теоретичною основою моделювання служать розв'язки крайових задач теорії дифракції пружних хвиль на дефектах у шарах та їх з'єднаннях. Існує багато методів розв'язування таких задач з використанням пакетів сучасних програмних засобів, які, однак, дуже часто вимагають значних часових ресурсів і потребують верифікації результатів. Метою даної статті є отримання референтних залежностей характеристик поля на основі дослідження простих моделей, що допускають математично строгий аналіз. Тут розглядаємо плоский, ізотропний, однорідний пружний шар, з'єднаний з півпростором, у якому міжфазний дефект задається півплощиною з імпедансною граничною умовою. Така структура підтримує збудження найпростіших поперечних SH-хвиль і допускає розв'язок відповідної задачі дифракції в аналітичному вигляді.

Моделювання дефекту заданням граничних умов широко використовується у науковій літературі [1–7], а залучення умов імпедансного типу [4, 10] дає можливість оцінити пошкодження з'єднання на етапі до утворення дефекту.

Крайова задача, що описує нашу модель зводиться до функціонального рівняння Вінера-Гопфа [5, 6, 8, 9], розв'язок якого забезпечує отримання виразів для характеристик поля, а також проведення числового аналізу практично для довільних значень параметрів моделі і частоти.

### 1. Формулювання задачі

Нехай пружний шар  $P: \{x \in (-\infty, \infty), y \in (-d, 0), z \in (-\infty, \infty)\}$  у декартовій системі координат  $O(x, y, z)$  з'єднаний з півпростором  $y > 0$ . Імпедансна півплощина  $\Gamma: \{x \in (-\infty, 0), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$  на поверхні з'єднання є моделлю дефекту з'єднання (див. рис.1).

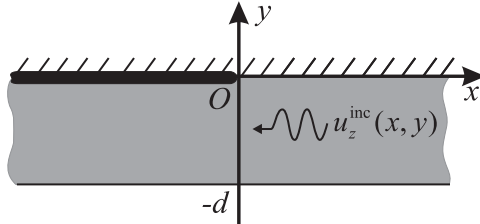


Рис. 1. Геометрична схема задачі

Нехай таку структуру опромінює нормальна SH-мода шару  $P$ , що поширюються у від'ємному напрямі осі  $Ox$ . Вважаємо, що залежність від часу є гармонічною  $e^{-i\omega t}$  і цей множник надалі опускаємо. За даних умов дифракція хвильовидної моди на дефекті описується однією скалярною

функцією  $u = u(x, y)$ , яка пов'язана з полем зміщень  $\mathbf{u} \equiv \vec{e}_z u(x, y)$  і зводиться до розв'язання крайової задачі для рівняння Гельмгольца

$$\partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in P, \quad (1)$$

з граничною умову імпедансного типу на  $\Gamma$

$$\partial_y u^{\text{tot}}(x, y) + \eta u^{\text{tot}}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

де  $\eta$  – імпеданс ( $\text{Im} \eta \leq 0$  [10]), що характеризує зв'язок між напруженням та зміщенням на площині  $\Gamma$ . Крім того, шукана функція повинна задовольняти умову відсутності напружень на вільній поверхні шару,

$$\tau_{yz} = \mu \partial_y u^{\text{tot}}(x, y) = 0, \quad y = -d; \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (3)$$

а також умову жорсткого з'єднання шару з півпростором

$$u^{\text{tot}} = 0, \quad y = 0; \quad x \in (0, \infty), \quad (4)$$

де  $u^{\text{tot}}(x, y) = u^{\text{tot}} = u + u^{\text{inc}}$ ,  $u = u(x, y)$  – невідоме дифраговане поле,  $u^{\text{inc}}(x, y) = u^{\text{inc}}$  – падаюче поле,  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона,

$$u^{\text{inc}}(x, y) = e^{\gamma_j x} \sin(\beta_j y), \quad (5)$$

$\beta_j = \pi(2j-1)/2d$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\gamma_j = \sqrt{\beta_j^2 - k^2}$ ,  $\text{Re} \gamma_j > 0$ ;  $k = k' + ik''$  – хвильове число ( $k', k'' > 0$ ,  $k' \gg k''$ ).

Єдиність розв'язку дифракційної задачі (1)–(4) забезпечується вибором класу функцій, що гарантують виконання умови граничного поглинання, коли

$|x| \rightarrow \infty$  та умови обмеженості енергії на вершині дефекту (умови Мейкснера):

$$u \underset{\rho \rightarrow 0}{=} O(\rho^\delta), \quad \partial u / \partial y \underset{\rho \rightarrow 0}{=} O(\rho^{-(1-\delta)}), \quad (6)$$

де  $\rho = [x^2 + y^2]^{1/2}$  – відстань до вершини дефекту;  $0 < \delta \leq 1/2$ .

## 2. Розв'язок задачі

Невідоме поле подаємо інтегралом Фур'є

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\alpha, y) e^{-i\alpha x} dx, \quad (7)$$

де  $U(\alpha, y) = B(\alpha)e^{\gamma y} + C(\alpha)e^{-\gamma y}$ ,  $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} = -i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}$ ,  $\text{Re } \gamma \geq 0$ ; функція  $U(\alpha, y)$  – регулярна в смузі  $\alpha \in \Pi: \{-\tau_0 < \alpha < \tau_0\}$ , де  $\tau_0 \leq \min\{\text{Im } k, \text{Re } \gamma_1\}$ ,  $\text{Re } \gamma_1 < \text{Re } \gamma_j$ , коли  $j > 1$ ;  $B(\alpha)$ ,  $C(\alpha)$  – невідомі функції регулярні в  $\Pi$ . Використовуючи метод Джонса [8], зводимо крайову задачу (1)–(4) до функціонального рівняння типу Вінера-Гопфа

$$M(\alpha)U^{++}(\alpha, 0) + \frac{i\beta_j M(\alpha)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} - \bar{U}^-(\alpha, 0) = 0, \quad \alpha \in \Pi. \quad (8)$$

Тут

$$\bar{U}^-(\alpha, 0) = \frac{d^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 u(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \quad (9)$$

$$U^{++}(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \partial_y u(x, 0) e^{i\alpha x} dx. \quad (10)$$

Характеристична функція

$$M(\alpha) = \frac{\text{ch}(\gamma d)}{\gamma d \text{sh}(\gamma d) + \bar{\eta} \text{ch}(\gamma d)} \quad (11)$$

парна і мероморфна у комплексній площині  $\alpha$ ; у смузі  $\Pi$  вона регулярна, а за її межами має прості нулі та полюси. Коли  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , справедлива асимптотична оцінка  $M(\alpha) = O(\alpha^{-1})$ ;  $\bar{U}^-(\alpha, 0)$  та  $U^{++}(\alpha, 0)$  – невідомі трансформанти Фур'є відповідно поля зміщень поверхні дефекту  $\Gamma$  та напружень в області  $\{x > 0, y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ ;  $\bar{\eta} = \eta d$ .

Асимптотичну поведінку невідомих функцій  $U^{++}(\alpha, 0)$  і  $\bar{U}^-(\alpha, 0)$  в областях регулярності при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  встановлюємо з умов на вершині (6):

$$U^{++}(\alpha, 0) = O(|\alpha|^{-1/2}), \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad \text{коли } \alpha > -\tau_0;$$

$$\bar{U}^-(\alpha, 0) = O(|\alpha|^{-3/2}), \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad \text{коли } \alpha < \tau_0.$$

Трансформанту Фур'є поля зміщень (7) записуємо так

$$U(\alpha, y) = \left[ U^{++}(\alpha, 0) - \bar{\eta} \bar{U}^-(\alpha, 0) + \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} \right] \frac{\text{ch}(\gamma(y+d))}{\gamma \text{sh}(\gamma d)}. \quad (12)$$

Функція (11) допускає факторизацію [8,9]:

$$M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha), \quad (13)$$

де функції  $M_+(\alpha)$  і  $M_-(\alpha)$  – регулярні і не мають нулів, відповідно, у верхній ( $\tau > -\tau_0$ ) та нижній ( $\tau < \tau_0$ ) півплощинах комплексної змінної  $\alpha$  зі спільною смугою регулярності  $\Pi$ . Позначимо через  $\pm i\gamma_{nc}$  та  $\pm i\gamma_{ns}$  нулі та полюси функції  $M(\alpha)$

$$\gamma_{nc} = d^{-1} \sqrt{4^{-1}\pi^2(2n-1)^2 - k^2 d^2}, \quad \gamma_{ns} = d^{-1} \sqrt{\varphi_n^2 - k^2 d^2} \quad n=1,2,\dots, \quad (14)$$

причому  $\gamma_{nc} \rightarrow \frac{\pi(n-1/2)}{d}$ ,  $\gamma_{ns} \rightarrow \frac{\pi(n-1)}{d}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Тут  $\varphi_n$  корені трансцендентного рівняння

$$\varphi \sin(\varphi) - \bar{\eta} \cos(\varphi) = 0. \quad (15)$$

Перші десять коренів рівняння (15) для різних значень  $\bar{\eta}$  наведено у [11].

Подаючи цілі функції у чисельнику та знаменнику виразу (11) у вигляді нескінченних добутків Вейерштрасса [9], знаходимо

$$M_{\pm}(\alpha) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 \pm \frac{\alpha}{i\gamma_{nc}} \right] e^{\pm i\alpha \frac{d}{\pi n}}}{\sqrt{\bar{\eta} - kd \operatorname{tg}(kd)} \left[ 1 \pm \frac{\alpha}{i\gamma_{1s}} \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 \pm \frac{\alpha}{i\gamma_{(n+1)s}} \right] e^{\pm i\alpha \frac{d}{\pi n}}}. \quad (16)$$

Використовуючи асимптотичну поведінку нулів та полюсів функцій (16), отримуємо, що областях регулярності  $M_{\pm}(\alpha) = O(|\alpha|^{-1/2})$  при  $|\alpha| \rightarrow \infty$ .

Застосовуючи процедури факторизації та декомпозиції, розв'язок рівняння Вінера-Гопфа (8) запишемо так

$$U^{++}(\alpha, 0) = -\frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} \left( 1 - \frac{M_+(i\gamma_j)}{M_+(\alpha)} \right), \quad (17)$$

$$\bar{U}^-(\alpha, 0) = \frac{i\beta_j M_+(i\gamma_j) M_-(\alpha)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}. \quad (18)$$

### 3. Подання дифрагованого поля

Підставляючи вирази (17) і (18) у (12), знаходимо трансформанту Фур'є поля переміщень. Для переходу в координатний простір використовуємо обернене перетворення Фур'є. Отриманий інтеграл виражаємо через суму лишків, дефор-

муючи контур інтегрування у нижню півплощину, коли  $x > 0$  та у верхню при  $x < 0$ , забезпечуючи виконання леми Жордана. Кінцева форма подання дифрагovanого поля зміщень має вигляд:

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & x > 0, \\ u_2(x, y), & x < 0. \end{cases} \quad (19)$$

Тут

$$u_1 = u_1(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} R_{jq} e^{-\gamma_{qc}x} \sin(\pi(q-1/2)y/d), \quad (20)$$

$$u_2 = u_2(x, y) = -u^{\text{inc}}(x, y) + \sum_{q=1}^{\infty} T_{jq} e^{\gamma_{qs}x} \cos(\varphi_q(y+d)/d), \quad (21)$$

де  $R_{jq}$ ,  $T_{jq}$  – коефіцієнти трансформації мод на вершині дефекту відповідно для областей  $x > 0$  і  $x < 0$ ;

$$R_{jq} = \frac{\pi\beta_j M_+(i\gamma_j) (2q-1)M_+(i\gamma_{qc})}{2d (\gamma_{qc} + \gamma_j)\gamma_{qc}}, \quad j, q = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

$$T_{jq} = \frac{i\beta_j M_+(i\gamma_j)}{dM_+(i\gamma_{qs})\gamma_{qs} \cos(\varphi_q) \left(1 + (1 + \bar{\eta})\text{tg}(\varphi_q)/\varphi_q\right) (\gamma_{qs} - \gamma_j)}, \quad j, q = 1, 2, \dots \quad (23)$$

На основі асимптотичних оцінок виразів (22), (23) встановлюємо, що  $R_{jq}, T_{jq} = O(q^{-3/2})$ , коли  $q \rightarrow \infty$ , а отже, при  $y=0$  маємо, що  $u = O(x^{1/2})$  і  $\partial_y u = O(x^{-1/2})$ , коли  $x \rightarrow -0$ .

Формули (19)–(23) дають точний розв’язок задачі, який задовольняє виконання усіх необхідних умов, і вони можуть використовуватись для знаходження поля переміщень за довільних значень геометричних параметрів нашої структури та частоти. Зауважимо, що у граничному випадку коли  $\bar{\eta} \rightarrow 0$  вирази (19)–(23) переходять у відомі, отримані раніше в [5].

#### 4. Енергетичні коефіцієнти відбивання і проходження

Отриманий розв’язок дифракційної задач (19)–(23) дозволяє провести аналіз поля у хвилеводі. Для його опису, важливе значення мають енергетичні характеристики відбивання і проходження пружної хвилі в окремі підобласті. Для вибраної часової залежності, визначимо коефіцієнт відбивання як відношення середнього по часу за період потоку потужності відбитої хвилі  $u_1$  до середнього потоку  $j$ -ої моди  $u^{\text{inc}}$ , що набігає в підобласті  $x > 0$  на межу поділу підобластей  $x=0$ ,  $-d \leq y \leq 0$  [7,12]. Аналогічно визначимо коефіцієнт проходження в область  $x < 0$  (рис.1). Вирази для коефіцієнтів відбивання та проходження відповідно запишемо так

$$V_j = \frac{\int_{-d}^0 \operatorname{Re}[i\tau_{xz}^{(1)}(u_1)^*] dy}{\int_{-d}^0 \operatorname{Re}[i\tau_{xz}^{(\text{inc})}(u^{\text{inc}})^*] dy}, \quad W_j = \frac{\int_{-d}^0 \operatorname{Re}[i\tau_{xz}^{(2)}(u_2)^*] dy}{\int_{-d}^0 \operatorname{Re}[i\tau_{xz}^{(\text{inc})}(u^{\text{inc}})^*] dy}, \quad (24)$$

де  $\tau_{xz} = \mu \partial u / \partial x$  – дотичні напруження; “\*” – позначення операції комплексного спряження.

Використавши формули (22), (23) і провівши відповідні перетворення, вирази (24) записуємо так

$$V_j = \sum_{q=1}^{N_a} \frac{|\gamma_{qc}|}{|\gamma_j|} |R_{jq}|^2, \quad W_j = \sum_{q=1}^{N_b} \frac{|\gamma_{qs}|}{|\gamma_j|} |T_{jq}|^2 \left( 1 + \frac{\sin(2\varphi_q)}{2\varphi_q} \right). \quad (25)$$

Тут  $N_a = [kd / \pi + 1 / 2]$  – кількість незатухаючих мод в області  $x > 0$ , де  $[ \cdot ]$  – функція Антьє, яка визначає цілу частину числа,  $N_b$  – кількість незатухаючих мод в області  $x < 0$ ,  $N_b = \max_q(kd > \varphi_q)$ .

## 5. Числові дослідження

На рис. 2 подано результати числового моделювання енергетичних коефіцієнтів відбивання та проходження першої моди падаючої хвилі в інтервалі  $\pi / 2 < kd < 3.5$  за різних дійсних додатніх значень імпедансного параметра  $\bar{\eta}$ . На рис. 2 спостерігаємо, що зі збільшенням  $\bar{\eta}$  при фіксованому значенні параметра  $kd$  величина  $V_1$  спадає, а  $W_1$  – зростає. Така поведінка коефіцієнтів відбивання та проходження відповідає фізичному розумінню процесу пошкодження, оскільки зростання  $\bar{\eta}$  робить дефект менш контрастним. Зауважимо, що на усьому інтервалі  $\pi / 2 < kd < 3.5$  виконується рівність  $V_1 + W_1 = 1$ , яка відображає умову розподілу енергії випромінювання між областями.

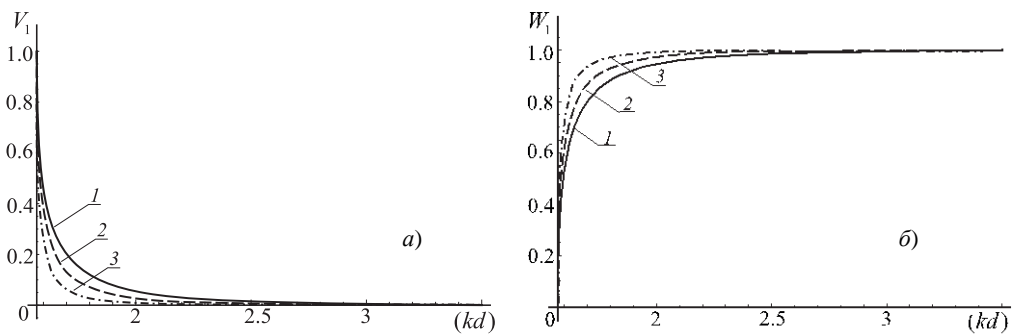


Рис. 2. Залежність енергетичних коефіцієнтів відбивання та проходження від  $kd$  для різних значень імпедансу  $\bar{\eta}$ : 1 –  $\bar{\eta} = 0$ , 2 –  $\bar{\eta} = 1.5$ , 3 –  $\bar{\eta} = 5$ .

**Висновки.** Запропонована теоретична модель поширення пружних SH хвиль у жорсткому з’єднанні шару з півпростором за наявності міжфазного дефекту. В

якості моделі дефекту використано напівнескінченну імпедансну плоску поверхню. Для розв'язання крайової задачі дифракції застосовано метод Вінера-Гопфа. Вирази для амплітуди дифрагованого поля подано у вигляді абсолютно збіжних рядів. Отримано формули для знаходження поля зміщень (20), (21), коефіцієнтів трансформації мод на вершині дефекта (22), (23), а також вирази для енергетичних коефіцієнтів відбивання та проходження хвилі (25), (26). Визначено вплив імпедансного параметра, який характеризує рівень пошкодженості з'єднання, на ці коефіцієнти.

### Література

- [1] *Graff K. F.* Wave motion in elastic solids. - New York: Dover Publications. - 1975. – P. 649.
- [2] *Collin R.E.* Field theory of guided waves. - New York: Wiley-IEEE Press. - 1991. – P. 851.
- [3] *Miklowitz J.* The theory of elastic waves and waveguides. – Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company. – 1978. – P. 618.
- [4] *Cheng J., Liu J.J., and Nakamura G.* Recovery of the shape of an obstacle and the boundary impedance from the far-field pattern. – J. Math. Kyoto U. – 2003. – vol. 43. – PP.165–186.
- [5] *Назарчук З.Т., Куриляк Д.Б., Войтко М.В., Кулинич Я.П.* Про взаємодію пружної SH-хвилі з міжфазною тріщиною в абсолютно жорсткому з'єднанні пластини з півпростором // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2012. – т.55, №2. – С. 107–118.
- [6] *Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т., Войтко М.В.* Аналіз поля плоскої SH-хвилі, розсіяної скінченною тріщиною на межі поділу матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 6. – С. 5–16.
- [7] *Семків М.Я., Г.М. Зражевський Г.М., Мацпура В.Т.* Дифракція нормальних SH-хвиль у хвилеводі з розрізом // Акуст. вісн. – 2011. – 14, №2. – С. 57–69.
- [8] *Mitra R., and Lee S.W.* Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. New York: Macmillan. – 1971. – P. 302.
- [9] *Noble B.* Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations, Belfast, Northern Ireland: Pergamon Press. - 1958. – P. 246.
- [10] *Kress R., and Lee K.-M.* Integral equation methods for scattering from an impedance crack. - J. of Computational and Appl. Math., vol. 161, no. 1. – 2003. – 161– PP.177.
- [11] *M.V. Voytko, Ya.P. Kulynych, and D.B. Kuryliak* SH-wave scattering from the interface defect. - Advances in Cyber-Physical Systems, 2020. Vol. 5, No 1, PP. 45–50.
- [12] *Tan T.H.* Reciprocity relations for scattering of plane, elastic waves // J. Acoust. Soc. Am. – 1977. – vol.61, no 4. – PP.928–931.

## Modeling of an elastic field scattered by an interface defect

Zinoviy Nazarchuk, Myron Voytko, Yaroslav Kulynych, Dozyslav Kuryliak

*The problem of the shear-wave (SH-wave) diffraction from the semi-infinite interface defect in the rigid junction of the elastic layer and the half-space is solved. The defect is modeled by the impedance surface. The dependences of the scattered displacement field, reflection and transmission coefficients on the structure parameters are presented in analytical form. The examples of numerical modeling of field characteristics are provided.*

Отримано 10.03.21