УДК 519.65

Інтерполяційний раціональний інтегральний дріб n - го порядку на континуальній множині вузлів

Ігор Демків[1], Ярослав Баранецький[2], Галина Берегова[3]

[1] д. ф.-м. н., професор, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна, e-mail: ihor.i.demkiv@lpnu.ua
[2] к. ф.-м. н., доцент, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна, e-mail: yaroslav.o.baranetskyi@lpnu.ua
[3] к. ф.-м. н., доцент, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна, e-mail: halyna.i.berehova@lpnu.ua

У роботі будується та досліджується інтегральний раціональний інтерполянт n – го порядку на континуальній множині вузлів, який є відношенням функціонального полінома першого степеня до функціонального полінома n-1 – го степеня. Підінтегральні ядра визначаються з відповідних континуальних умов. При цьому одержуємо інтегральне рівняння для визначення ядра інтеграла чисельника. Це інтегральне рівняння елементарними перетвореннями зводиться до стандартного вигляду інтегрального рівняння Вольтерра другого роду. Підставляючи одержаний розв'язок у вирази для решти ядер одержуємо вирази для всіх ядер, що входять у інтегральний раціональний інтерполянт. Тоді для того, щоб раціональний функціонал n – го порядку був інтерполяційним на континуальних вузлах достатньо, щоб цей функціонал задовольняв правилу підстановки. Зауважимо, що одержаний інтерполянт є таким, що зберігає будь який раціональний функціонал одержаного вигляду.

Ключові слова: *інтерполяція, вузли інтерполяції, раціональний дріб, континуальна множина вузлів, ланцюговий дріб, поліноміальна інтерполяція функціоналів.*

Вступ. Наближенню функціоналів $F : L_1(0,1) \to R^1$ на континуальній множині вузлів

$$x^n\left(z,\boldsymbol{\xi}^n\right) = x_0(z) + \sum_{i=1}^{n} H(z-\xi_i)\left[x_i(z) - x_{i-1}(z)\right], \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\xi}^n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \boldsymbol{\Omega}_{z^n} = \left\{\mathbf{z}^n : 0 \le z_1 \le \ldots \le z_n \le 1\right\}$$

присвячено ряд робіт, наприклад, [1 - 8].

Тут через $x_i(z) \in Q[0,1]$, $i = 0,1,\ldots$ позначені довільні, фіксовані елементи з простору $Q[0,1]$ – кусково-неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій зі скінченою кількістю точок розриву першого роду, сукупність яких називається каркасом інтерполянта. $H(t)$ – функція Хевісайда.

У роботах [1 – 3] досліджується поліноміальна інтерполяція функціоналів. Роботи [4 – 8] присвячені представленню функціоналів ланцюговими дробами.

Метою цієї роботи є побудова та дослідження раціонального наближення функціоналів на континуальній множині вузлів.

1. Побудова інтегрального раціонального інтерполянта

Побудуємо інтегральний раціональний інтерполянт $R^I_{1,n-1}(x(\cdot))$, який є відношенням функціонального полінома першого степеня до функціонального полінома n-1 степеня. Його шукаємо у вигляді

$$R^I_{1,n}(x(\cdot)) = \frac{F(x_0(\cdot)) + \int_0^1 K_{1,1}(z)(x(z) - x_0(z))dz}{1 + P_n}, \quad (2)$$

де

$$P_n = \int_0^1 K_{1,2}(z)(x(z) - x_0(z))dz + \sum_{j=2}^{n-1} \int_0^1 \int_{z_1}^1 \dots \int_{z_{j-1}}^1 K^I_j(\mathbf{z}^j) \prod\nolimits_{p=1}^{j} (x(z_p) - x_{p-1}(z_p)) dz_j \dots dz_1,$$

підінтегральні ядра визначаються з відповідних континуальних умов.

За перший континуальний вузол, згідно (1), візьмемо такий $x^1(z;\xi_1) = x_0(z) + H(z - \xi_1)(x_1(z) - x_0(z))$. Тоді інтерполяційна умова у цьому вузлі приводить до рівняння

$$K_{1,2}(\xi_1) = -\frac{1}{x_1(\xi_1) - x_0(\xi_1)} \frac{d}{d\xi_1} \frac{F(x_0(\cdot)) + \int_{\xi_1}^1 K_{1,1}(z)(x_1(z) - x_0(z))dz}{F(x^1(\cdot;\xi_1))}. \quad (3)$$

Наступний континуальний інтерполяційний вузол беремо у вигляді

$$x^2(z;\boldsymbol{\xi}^2) = x_0(z) + H(z - \xi_1)(x_1(z) - x_0(z)) + H(z - \xi_2)(x_2(z) - x_1(z)) \quad (4)$$

і інтерполяційна умова $R^I_{1,2}(x^2(\cdot;\boldsymbol{\xi}^2)) = F(x^2(\cdot;\boldsymbol{\xi}^2))$ приводить до співвідношення

$$K_2(\boldsymbol{\xi}^2) = \prod_{i=1}^{2} (x_i(\xi_i) - x_{i-1}(\xi_i))^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{F(x_0(\cdot)) + \int_0^1 K_{1,1}(z)(x^2(z;\boldsymbol{\xi}^2) - x_0(z))dz}{F(x^2(\cdot;\boldsymbol{\xi}^2))}. \quad (5)$$

Далі маємо

$$K_j(\boldsymbol{\xi}^j) = (-1)^j \prod_{i=1}^{j} (x_j(\xi_i) - x_{i-1}(\xi_i))^{-1} \frac{\partial^j}{\partial \xi_1 \dots \partial \xi_j} \frac{F(x_0(\cdot)) + \int_0^1 K_{1,1}(z)(x^j(z;\boldsymbol{\xi}^j) - x_0(z))dz}{F(x^j(\cdot;\boldsymbol{\xi}^j))},$$

$$x^j(z;\boldsymbol{\xi}^j) = x_0(z) + \sum_{p=1}^{j} H(z - \xi_p)\left[x_p(z) - x_{p-1}(z)\right], \quad j = 2,\dots,n-1. \quad (6)$$

Аналогічне співвідношення одержуємо, якщо в (4), (5) замінити $x_2(z)$ на $x_3(z)$

$$K_2(\boldsymbol{\xi}^2) = \left[\prod_{i=1}^{2} (x_i(\xi_i) - x_{i-1}(\xi_i))^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \frac{F(x_0(\cdot)) + \int_0^1 K_{1,1}(z)(x^2(z;\boldsymbol{\xi}^2) - x_0(z))dz}{F(x^2(\cdot;\boldsymbol{\xi}^2))} \right]_{x_2(z)=x_3(z)} . \tag{7}$$

Прирівнюючи праві частини співвідношень (5), (7) і покладаючи $\xi_2 = \xi_1$, одержуємо інтегральне рівняння для визначення ядра $K_{1,1}(z)$

$$K_{1,1}(\xi_1)\, a(\xi_1) + b_1(\xi_1) \int_{\xi_1}^{1} K_{1,1}(z)(x_2(z) - x_0(z))dz +$$

$$+ b_2(\xi_1) \int_{\xi_1}^{1} K_{1,1}(z)(x_3(z) - x_0(z))dz = F(x_0(\cdot))g(\xi_1),$$

$$a(\xi_1) = a_1(\xi_1) - a_2(\xi_1), \quad a_2(\xi_1) = a_1(\xi_1)|_{x_2(z)=x_3(z)}, \quad b_2(\xi_1) = b_1(\xi_1)|_{x_2(z)=x_3(z)},$$

$$a_1(\xi_1) = \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \xi_2} F^{-1}(x^2(\cdot;\boldsymbol{\xi}^2))}{x_2(\xi_2) - x_1(\xi_2)} + \frac{2x_1(\xi_2) - x_0(\xi_2) - x_2(\xi_2)}{\prod_{i=1}^{2}(x_i(\xi_i) - x_{i-1}(\xi_i))} \frac{\partial}{\partial \xi_1} F^{-1}(x^2(\cdot;\vec{\xi}^2)) \right]_{\xi_2=\xi_1} , \tag{8}$$

$$b_1(\xi_1) = \left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} F^{-1}(x^2(\cdot;\boldsymbol{\xi}^2))}{\prod_{i=1}^{2}(x_i(\xi_i) - x_{i-1}(\xi_i))} \right]_{\xi_2=\xi_1} , \quad g(\xi_1) = -b_1(\xi_1) + b_2(\xi_1).$$

Інтегральне рівняння (8) елементарними перетвореннями приводиться до стандартного вигляду інтегрального рівняння Вольтера другого роду. Тоді правильним є твердження (див. наприклад, [9]).

Лема 1. *Нехай функції* $a(\xi_1), b_1(\xi_1), b_2(\xi_1), g(\xi_1)$ *є неперервними на відрізку* $[0,1]$ *і* $a(\xi_1) \ge \alpha > 0$ *на цьому ж відрізку. Тоді інтегральне рівняння* (8) *має єдиний неперервний розв'язок* $K_{1,1}(\xi_1)$.

Підставляючи $K_{1,1}(\xi_1)$ у (3), (5), (6), одержуємо вирази для всіх ядер, що входять у інтегральний раціональний інтерполянт $R_{1,n-1}^{I}(x(\cdot))$. Зауважимо, що інтерполянт (2), (3), (5), (6) є таким, що зберігає будь який раціональний функціонал вигляду

$$R_{1,2}(x(\cdot))=\frac{K_0+\int_0^1 K_{1,1}(z)\,x(z)dz}{1+\int_0^1 K_{1,2}(z)\,x(z)dz+\sum\limits_{j=2}^{n-1}\int_0^1\int_{z_1}^1...\int_{z_{j-1}}^1 K_j^I(\mathbf{z}^j)\prod_{p=1}^{j}(x(z_p)-x_{p-1}(z_p))dz_j...dz_1}.$$

Має місце

Теорема 1. Нехай виконуються умови леми 1. Тоді для того, щоб раціональний функціонал (2), (3), (6) був інтерполяційним на континуальних вузлах

$$x^j(z;\boldsymbol{\xi}^j)=x_0(z)+\sum_{p=1}^{j}H(z-\xi_p)\left[x_p(z)-x_{p-1}(z)\right],$$

$$j=1,2,...,n-1,\ \ x^j(z;\boldsymbol{\xi}^j)|_{x_j(z)=x_{j+1}(z)}$$

достатньо, щоб функціонал $F(x(\cdot))$ задовольняв правилу підстановки

$$\frac{\partial^p}{\partial z_1\partial z_2\ldots\partial z_p}\left[F\left(x^{p+1}\left(\cdot,\mathbf{z}^{p+1}\right)\right)\Big|_{z_{p+1}=z_p}\right]=$$

$$=\left[\frac{\partial^p}{\partial z_1\partial z_2\ldots\partial z_p}F\left(x^{p+1}\left(\cdot,\mathbf{z}^{p+1}\right)\right)\right]\Bigg|_{z_{p+1}=z_p}\frac{x_{p+1}\left(z_p\right)-x_{p-1}\left(z_p\right)}{x_p\left(z_p\right)-x_{p-1}\left(z_p\right)},\ \ p=\overline{1,n}.$$

2. Приклад

Для функціоналу

$$F(x(\cdot))=\frac{1}{1+\left(\int_0^1 x(s)ds\right)^2}$$

при n=3 одержуємо

$$K_{1,1}(z)\equiv 0,\ \ K_2(\mathbf{z}^2)=F(x_0(\cdot)),\ \ K_{1,2}(z)=2F(x_0(\cdot))\left[\int_z^1 x_1(s)ds+\int_0^z x_0(z)dz\right],$$

$$R_{1,2}^I(x(\cdot))=F(x(\cdot)).$$

Висновок. Побудовано інтегральний раціональний інтерполянт, який є відношенням функціонального полінома першого степеня до функціонального полінома $(n-1)$-го степеня. Доведено достатні умови, щоб побудований раціональний функціональний дріб був інтерполяційним.

Література

[1] *Demkiv I. I.* Interpolation funktional polynomial of the fourth order which does not use substitution rule // J. Numer. Appl. Math. – 2010. – No. 1(100). – P. 40 – 59.
[2] *Demkiv, I. I.* An interpolation functional third-degree polynomial that does not use substitution rules // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 180 (1). – P. 34–50.
[3] *Baranetskij Y. O., Demkiv I. I., Kopach M. I., Obshta A. F.* The interpolation functional polynomial: the analogue of the Taylor formula // Математичні студії. – 2018. – Vol. 50, iss. 2. – P. 198–203.
[4] *Makarov V. L., Demkiv, I. I.* Relation between interpolating integral continued fractions and interpolating branched continued fractions // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 165 (2). – P. 171–180.
[5] *Makarov V. L., Demkiv I. I.* Interpolating integral continued fraction of the Thiele type // J. Math. Sci. – 2017. – 220.№1 – P. 50 – 58.
[6] *Makarov V., Demkiv I. I.* Abstract interpolating fraction of the thiele type // Український математичний вісник. – 2018. – Vol. 231, № 4. – С. 536–546.
[7] *Makarov V., Demkiv I.* Abstract interpolation by continued thiele-type fractions // Cybernetics and Systems Analysis. – 2018. – Vol. 54, iss.1. – P. 122–129.
[8] *Demkiv I., Ivasyuk I., Kopach M. I.* Interpolation integral continued fraction with twofold node // Mathematical Modeling and Computing. – 2019. – Vol. 6, № 1. – P. 1–13.
[9] *Забрейко П.П.* Интегральные уравнения / П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский и др. - М.: Наука, 1968. - 448 с.

Interpolation rational integral fraction of nth order on a continuum set of nodes

Ihor Demkiv, Yaroslav Baranetskyi, Halyna Berehova

The paper constructs and investigates an integral rational interpolant of the nth order on a continuum set of nodes, which is the ratio of a functional polynomial of the first degree to a functional polynomial of the (n-1)th degree. Subintegral kernels are determined from the corresponding continuum conditions. Additionally, we obtain an integral equation to determine the kernel of the numerator integral. This integral equation, using elementary transformations, is reduced to the standard form of the integral Volterra equation of the second kind. Substituting the obtained solution into expressions for the rest of the kernels, we obtain expressions for all kernels included in the integral rational interpolant. Then, in order for a rational functional of the nth order to be interpolation on continuous nodes, it is sufficient for this functional to satisfy the substitution rule. Note that the resulting interpolant preserves any rational functional of the obtained form.

Отримано 27.02.21