УДК 517. 524

Про обчислення гіпергеометричної функції $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ за допомогою гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

Володимир Гладун[1], Наталія Гоєнко[2], Левко Вентик[3], Олександра Манзій[4]

[1] к. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С.Бандери, 12, 79013, Львів, e-mail: volodymyr.r.hladun@lpnu.ua
[2] к. ф.-м. н., ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, Львів, e-mail: hoyenko@gmail.com
[3] Національний університет «Львівська політехніка», вул. С.Бандери, 12, 79013, Львів, e-mail: levko.s.ventyk@lpnu.ua
[4] к. ф.-м. н., доцент , Національний університет «Львівська політехніка», вул. С.Бандери, 12, 79013, Львів, e-mail: oleksandra.s.manzii@lpnu.ua

У роботі, використовуючи деякі рекурентні співвідношення, побудовано розвинення гіпергеометричної функції Аппеля $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ у гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду. Отримано явні формули для коефіцієнтів побудованого розвинення. Досліджено структуру отриманого гіллястого ланцюгового дробу. Обчислено значення підхідних дробів та відповідних частинних сум гіпергеометричного ряду в різних точках двовимірного комплексного простору. Здійснено порівняльний аналіз отриманих значень, результати якого підтверджують ефективність застосування гіллястих ланцюгових дробів для обчислення значень гіпергеометричної функції $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ в просторі C^2.

Ключові слова: діаграми Фейнмана; гіпергеометрична функція; рекурентні формули; розвинення; гіллястий ланцюговий дріб; підхідний дріб.

Вступ. Математичні моделі багатьох задач фізики та астрофізики описуються системами лінійних диференціальних рівнянь, в розв'язках яких присутні гіпергеометричні функції однієї чи багатьох змінних [1-3]. Зокрема саме гіпергеометрична функція Аппеля F_4 виникає в задачах багатопетлевої квантової хромодинаміки при оцінці скалярних інтегралів діаграм Фейнмана [4]. При обчисленні значень таких функцій у більшості випадків користуються їх інтегральними зображеннями [5-7]. Альтернативним апаратом для наближення гіпергеометричних функцій є неперервні дроби [8-10]. Гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) є багатовимірним узагальненням неперервних дробів і використовуються для апроксимації функцій багатьох змінних [11-14]. Перевагою використання ГЛД є мале накопичення обчислювальної похибки [15] та ширша область збіжності у порівнянні з областю збіжності гіпергеометричних рядів [16]. В статті запропоновано для обчислення значень гіпергеометричної функції Аппеля $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ застосовувати її розвинення у гіллястий ланцюговий дріб. Здійснена програмна реалізація для обчислення значень підхідних дробів побудованого ГЛД та частинних сум гіпергеометричного ряду F_4. Здійснено порівняльний аналіз результатів обчислень в деяких точках комплексного простору.

1. Побудова формального розвинення функції $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ у ГЛД

Об'єктом даного дослідження є гіпергеометрична функція Аппеля F_4, $\bar{z}=(z_1,z_2)$, яка в області $\sqrt{|z_1|}+\sqrt{|z_2|}<1$ простору C^2 зображається у вигляді гіпергеометричного ряду

$$\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(a)_{k+l}(b)_{k+l}}{(c)_k(c')_l}\frac{z_1^k z_2^l}{k!l!}, \tag{1}$$

де $(a)_k=a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)$, $z_i\in C$, $i=1,2$, $(a)_0=1$.

Для гіпергеометричного ряду (1) виконуються рекурентні співвідношення [17]:

$$F_4(a,b;c,c';\bar{z})=F_4(a+1,b;c+1,c';\bar{z})-\frac{(c-a)b}{c(c+1)}z_1\cdot F_4(a+1,b+1;c+2,c';\bar{z})-$$
$$\frac{b}{c'}z_2\cdot F_4(a+1,b+1;c+1,c'+1;\bar{z}), \tag{2}$$

$$F_4(a,b;c,c';\bar{z})=F_4(a,b+1;c+1,c';\bar{z})-\frac{(c-b)a}{c(c+1)}z_1\cdot F_4(a+1,b+1;c+2,c';\bar{z})-$$
$$\frac{a}{c'}z_2\cdot F_4(a+1,b+1;c+1,c'+1;\bar{z}), \tag{3}$$

$$F_4(a,b;c,c';\bar{z})=F_4(a+1,b;c,c'+1;\bar{z})-\frac{b}{c}z_1\cdot F_4(a+1,b+1;c+1,c'+1;\bar{z})-$$
$$\frac{(c'-a)b}{c'(c'+1)}z_2\cdot F_4(a+1,b+1;c,c'+2;\bar{z}), \tag{4}$$

$$F_4(a,b;c,c';\bar{z})=F_4(a,b+1;c,c'+1;\bar{z})-\frac{a}{c}z_1\cdot F_4(a+1,b+1;c+1,c'+1;\bar{z})-$$
$$\frac{(c'-b)a}{c'(c'+1)}z_2\cdot F_4(a+1,b+1;c,c'+2;\bar{z}). \tag{5}$$

Теорема 1. Для гіпергеометричного ряду $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ справджується розвинення у гіллястий ланцюговий С-дріб

$$\left(1+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{-c_{i(k)}(\bar{z})}{1}\right)^{-1}, \tag{6}$$

де мультиіндекс $i(k)=i_1i_2..i_k$, $i_j=1,2$, $j=1,\ldots,k$, а коефіцієнти дробу обчислюються за формулами:

$$c_i(\bar{z})=\begin{cases} z_1, i=1\\ z_2, i=2\end{cases},\quad c_{i(2n)}(\bar{z})=\begin{cases}\dfrac{n}{n+1}z_1,\, i_{2n}=1\\ \dfrac{n}{n+1}z_2,\, i_{2n}=2\end{cases},$$

$$c_{i(2n)1}(\bar{z})=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}z_1, i_{2n}=1\\ z_1, i_{2n}=2\end{cases},\ c_{i(2n)2}(\bar{z})=\begin{cases} z_2, i_{2n}=1\\ \dfrac{1}{n+1}z_2, i_{2n}=2\end{cases}, \text{ де } n=1,\ldots$$

При доведені теореми використано рекурентні співвідношення (2)-(5) та методику побудови формального розвинення у ГЛД для відношення гіпергеометричних функцій $\dfrac{F_4(0,2;1,2;\bar{z})}{F_4(1,2;2,2;\bar{z})}$. Враховуючи, що $F_4(0,b;c,c';\bar{z})=1$, отримано формальне розвинення у ГЛД для функції $F_4(1,2;2,2;\bar{z})$ та встановлено явні формули для коефіцієнтів побудованого дробу (6).

2. Аналіз отриманого ГЛД для функції $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$

Побудований ГЛД (6) має специфічну структуру: дві гілки розгалуження на непарному поверсі дробу та одну гілку на парному поверсі. Таким чином, кількість гілок розгалуження на *n*-му поверсі побудованого дробу (6) дорівнює $2^{[(n+1)/2]}$ на відміну від 2^n, як для звичайного ГЛД з двома гілками розгалуження на кожному поверсі. Таке суттєве зменшення кількості гілок розгалуження дає можливість використати більш оптимальні алгоритми при обчисленні значення підхідних дробів ГЛД.

Для порівняння та аналізу отриманих результатів побудовано таблицю 1, в якій подано результати обчислення значень функції $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$, підхідних дробів f_{n_1} ГЛД (6) та частинних сум S_{n_2} гіпергеометричного ряду (1), де

$$f_{n_1}=\left(1+\mathop{D}_{k=1}^{n_1}\sum_{i_k=1}^{2}\frac{-c_{i(k)}(\bar{z})}{1}\right)^{-1},\qquad \left|f_{n_1+1}-f_{n_1}\right|<\varepsilon,\qquad S_{n_2}=\sum_{k,l=0}^{n_2}\frac{(a)_{k+l}(b)_{k+l}}{(c)_k(c')_l}\frac{z_1^k z_2^l}{k!l!},$$

$k+l\le n_2$, $\left|S_{n_2+1}-S_{n_2}\right|<\varepsilon$. Обчислення проводилися з заданою точністю $\varepsilon=10^{-6}$.

Значення гіпергеометричної функції $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ в заданих точках отримано за допомогою програмного забезпечення, створеного авторами статті.

На рисунку 1 зображено область збіжності гіпергеометричного ряду (1) та точки, в яких проводилися обчислення, подані в таблиці 1.

Отримані результати дають можливість стверджувати ефективність використання ГЛД (6) як апарату обчислення функції $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$.

Таблиця 1.

Результати обчислень значень функції $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ за допомогою ряду (1) та ГЛД (6)

№	(z_1,z_2)	$F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$	f_{n_1}	n_1	S_{n_2}	n_2
1	(-0.2,-0.2)	0.729490168753	0.7294901	8	0.7294897	41
2	(0.01,-0.7)	0.590272808333	0.5902728	6	0.5902731	28
3	(-0.05,-0.5)	0.652018189012	0.6520181	7	0.6520186	62
4	(0,-0.8)	0,555555555555	0,5555555	2	0,5555559	62
5	(0.35,0.01)	1.576084608477	1.5760843	6	1.5760841	16
6	(0.25+0.25*i, 0.05+0.05*i)	1.156099054831+ 0.533057340928*i	1.15609905+ 0.53305734*i	9	1.15609920+ 0.53305637*i	32

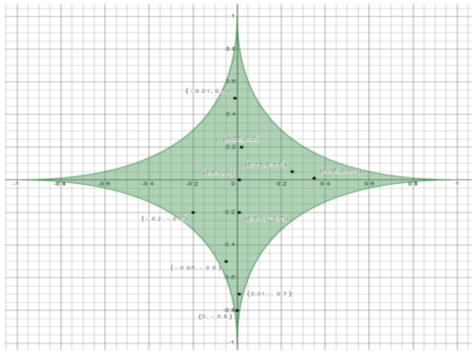

Рис. 1. Область збіжності гіпергеометричного ряду (1) та експериментальні точки

Висновки. Таким чином в роботі запропоновано для обчислення значень гіпергеометричної функції Аппеля $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ застосовувати її розвинення у ГЛД. Здійснено порівняльний аналіз обчислених значень в деяких точках комплексного простору за допомогою підхідних дробів і відповідних частинних сум гіпергеометричного ряду F_4, який підтверджує ефективність застосування ГЛД для обчислення значень спеціальних функцій математичної фізики.

Література

[1] *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and applications. – New York-Sydney-Toronto, Chichester, Ellis Horwood, 1976. – 376 p.

[2] *T. Huber and D. Maitre*, HypExp 2, Expanding Hypergeometric Functions about Half-Integer Parameters, Comput. Phys. Commun. 178 (2008) 755–776, [arXiv:0708.2443].

[3] *V. V. Bytev, M. Yu. Kalmykov, and B. A. Kniehl*, Differential reduction of generalized hypergeometric functions from Feynman diagrams: One-variable case, Nucl. Phys. B836 (2010) 129–170, [arXiv:0904.0214].

[4] *Tai-Fu Feng, Chao-Hsi Chang, Jian-Bin Chen, Zhi-Hua Gu, Hai-Bin Zhang.* Evaluating Feynman integrals by the hypergeometry // Nuclear Physics. - 2018. - B 927. - P.516-549.

[5] *Бейтмен Г., Єрдейи А*. Высшие трансцендентные функции, - Т.1. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
[6] *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации: Пер. с англ. Г.Бабенко. – М.: Изд-во «Мир», 1980. – 608 с.
[7] *M. Yu. Kalmykov and B. A. Kniehl,* Mellin-Barnes representations of Feynman diagrams, linear systems of differential equations, and polynomial solutions, Phys. Lett. B714 (2012) 103–109.
[8] *Джоунс У., Трон В*. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: Пер. С англ.., - М.: Мир, 1985. – 414 с.
[9] *Cuyt A., Brevik Petersen V., Vendonk B., Waadeland H., Jones W.B*. Handbook of Continued Fractions for Special Functions. – New York: Springer Science + Business Media B.V., 2008. – 413 p.
[10] *Lorentzen L., Waadeland H*. Continued Fractions with Application, Amsterdam: North-Holland. – 1992. – 606 p.
[11] *Скоробогатько В.Я*. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
[12] *Гоєнко Н.П., Гладун В.Р., Манзій О.С*. Про нескінченні залишки гіллястого ланцюгового дробу Ньордунда для гіпергеометричних функцій Аппеля // Карпатські математичні публікації. – 2014. – Т.6, №1. – С. 11–25.
[13] *Manziy O.S., Hladun V.R., Ventyk L.S*. The algorithms of constructing the continued fractions for any rations of the hypergeometric Gaussian functions // Mathematical Modeling and Computing. – 2017. – Vol.4, №1. – P.48-58.
[14] *Н. Гоєнко, Т. Антонова, С. Ракінцев* Наближення відношень функцій Лаурічелли-Сарана F_s з дійсними параметрами гіллястими ланцюговими дробами // Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка. - 2011. - Т. 8. - С. 28-42.
[15] *Hladun V. R.* Some Sets of Relative Stability Under Perturbations of Branched Continued Fractions with Complex Elements and a Variable Number of Branches // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. Vol.255. – P.11-25.
[16] *Д.І.Боднар* Ветвящие цепные дроби. – К. Наук. думка. – 1986, - 176 с.
[17] *Боднар Д.І*. Багатовимірні С-дроби. – Мат. методи та фіз.-мех. поля, 1996 – 39 №2 – С.39-46.

About the calculation of hypergeometric function $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ by the branched continued fraction of a special kind

Volodymyr Hladun, Nataliya Hoyenko, Levko Ventyk, Oleksandra Manziy

In the paper, using some recurrent relations, the expansion of the hypergeometric Appel function $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ *into a branched continued fraction of special form is constructed. Explicit formulas for the coefficients of constructed development are obtained. The structure of the obtained branched continued fraction is investigated. The values of the suitable fractions and the corresponding partial sums of the hypergeometric series at different points of the two-dimensional complex space are calculated. A comparative analysis of the obtained values is carried out, the results of which confirm the efficiency of using branched continued fractions to calculate the values of the hypergeometric function* $F_4(1,2;2,2;z_1,z_2)$ *in space* C^2.

Отримано 18.03.21