УДК 519.8Х

Достатня умова точної двоїстої оцінки для сепарабельної квадратичної оптимізаційної задачі

Олег Березовський

к. ф.-м. н., с. н. с., Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, проспект Академіка Глушкова, 40, Київ, 03187, e-mail: o.a.berezovskyi@gmail.com

В роботі розглядаються неопуклі сепарабельні квадратичні оптимізаційні задачі при обмеженнях-нерівностях. Наведено достатню умову знаходження значення і точки глобального екстремуму задачі даного типу шляхом обчислення лагранжевої двоїстої оцінки. Особливість цієї умови полягає в тому, що вона легко перевіряється і вимагає від матриці гессіана функції Лагранжа лише, щоб її область додатної визначеності була не порожньою. Отриманий для двоїстої оцінки результат має місце і для оцінки, отриманої за допомогою SDP-релаксації.

Ключові слова: сепарабельна квадратична оптимізаційна задача; глобальний екстремум; двоїста оцінка; додатно визначена матриця; нульовий розрив двоїстості

Вступ. Під квадратичною оптимізаційною задачею розуміють задачу математичного програмування такого вигляду:

$$f^* = \inf_{x \in T} f_0(x)\,, \tag{1}$$

де $T = \{x: f_i(x) \le 0, i \in I^{LQ},\ f_i(x) = 0, i \in I^{EQ}; x \in R^n\}$, $f_i(x) = x^T A_i x + b^T{}_i x + c_i$, $i \in \{0\} \bigcup I^{LQ} \bigcup I^{EQ}$, – квадратична функція з симетричною $n \times n$-матрицею A_i, вектором $b_i \in R^n$ і константою $c_i \in R^1$; $m = |I^{LQ}| + |I^{EQ}|$ – загальна кількість обмежень. У загальному випадку квадратична оптимізаційна задача (1) відноситься до класу NP-складних задач, у зв'язку з чим виникає інтерес до знаходження оцінок її глобального мінімуму f^*, зокрема, лагранжевої двоїстої оцінки ψ^* [1]:

$$\psi^* = \psi(u^*) = \sup_{\substack{A(u) \succ 0,\\ u_i \ge 0,\, i \in I^{LQ},\\ u \in R^m}} \left(\psi(u) = \inf_{x \in R^n} L(u, x) \right) \le f^*, \tag{2}$$

де $L(u,x) = x^T A(u)x + b^T(u)x + c(u)$ – функція Лагранжа для задачи (1), $A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i$, $b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$, $c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i$, $m = \left|I^{LQ}\right| + \left|I^{EQ}\right|$, $A \succ 0$ – додатно визначена матриця A. Використання двоїстих оцінок при дослідженні квадратичних оптимізаційних задач приводить до необхідності оцінки їхньої якості (розриву двоїстості). Особливий інтерес викликає визначення спеціальних підкласів квадратичних задач, для яких ці оцінки виявляюся точними ($\psi^* = f^*$), тобто дозволяють знайти значення глобального екстремуму, а, можливо, і саму точку глобального екстремуму. Визначенню одного з таких випадків і присвячена дана робота. Результат сформульовано у вигляді достатньої умови отримання точної двоїстої оцінки для сепарабельної квадратичної оптимізаційної задачі при обмеженнях-нерівностях.

1. Постановка задачі

Розглянемо окремий випадок задачі (1) – сепарабельну квадратичну оптимізаційну задачу при обмеженнях-нерівностях:

$$f^* = \inf_{x \in T} \left(\frac{1}{2} x^T A_0 x + b_0^T x + c_0 \right), \tag{3}$$

де $T = \{x : f_i(x) = \frac{1}{2} x^T A_i x + b_i^T x + c_i \le 0, i = 0,\ldots,m; x \in R^n\}$; $A_i = diag(A_{i1}, A_{i2},\ldots, A_{in})$, $i = 0,\ldots,m$, – діагональні матриці.

Мета роботи – отримати умови точної двоїстої оцінки для задачі (3). Відзначимо, що надалі будемо вважати, що область визначення задачі (2) для знаходження двоїстої оцінки ψ^* є не порожня множина.

2. Відомі результати

В роботі [2] для квадратичної оптимізаційної задачі загального вигляду (1) сформульовано критерій отримання точної двоїстої оцінки (2).

Нехай Γ^+ – множина граничних точок множини $\{u : A(u) \succeq 0; u_i \ge 0, i \in I^{LQ}; u \in R^m\}$. Для кожної точки $u \in \Gamma^+$ визначено множину $J(u) = \{ j : \lambda_j(u) = 0, j \in \{1,...,n\}\}$, де $\lambda_j(u)$, $j \in \{1,...,n\}$ – власні числа матриці $A(u)$; $\xi_j(u)$ – власні вектори, що відповідають власним числам $\lambda_j(u)$. Позначимо x^* і u^* вектори, в яких досягаються значення f^* й ψ^* у задачах (1) і (2) відповідно.

Теорема 1 [2]. Якщо існують такий вектор p и таке додатне число $\tilde{\varepsilon} > 0$, що для довільного $\varepsilon \in (0,\tilde{\varepsilon})$

$$\forall u \in \Gamma^{+} \quad \exists j \in J(u) \text{ таке, що } \xi_j^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \varepsilon p) \neq 0\,, \tag{4}$$

то двоїста оцінка ψ^* (2) для квадратичної оптимізаційної задачі (1) точна ($\psi^* = f^*$). Причому, якщо умова (4) виконується при $p = 0$, то вектор

$$x^* = x(u^*) = -A^{-1}(u^*)b(u^*)/2$$

розв'язку задачі (2) є і розв'язком задачі (1).

2. Достатня умова точної двоїстої оцінки для задачі (3)

Твердження. Якщо всі вектори b_i, $i = 0,1,...,m$, задачі (3) розташовані в одному відкритому ортанті, то значення двоїстої оцінки (2) задачі (3) співпадає зі значенням її глобального мінімуму, а $x^* = -A^{-1}(u^*)b(u^*)/2$.

Доведення. Для доведення скористаємося теоремою 1. Функція Лагранжа задачі (3) дорівнює $L(x,u) = x^T A(u)x + b^T(u)x + c(u)$, де

$$A(u,v) = diag\left(\frac{1}{2}\left(A_{0k} + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{ik}\right), k = 1,...,n\right),$$

$$b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i\,,\; c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i\,, u \geq 0\,.$$

Оскільки власні вектори матриці $A(u)$ направлені за координатними осями, а власні числа дорівнюють $\lambda_k(u) = \frac{1}{2}\left(A_{0k} + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{ik}\right)$, $k = 1,...,n$, то

$$\Gamma^{+} = \left\{u : \min_{k=1,...,\mathrm{n}}\left(A_{i0} + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{ik}\right) = 0; u \geq 0\right\}.$$

Тоді умова (4) при $p = 0$ для задачі (3) матиме вигляд

$$\forall u \in \left\{u : \min_{k=1,...,\mathrm{n}}\left(A_{0k} + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{ik}\right) = 0; u \geq 0\right\}$$

$$\exists k \in J(u) \text{ таке, що } e_k^T\left(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i\right) \neq 0\,, \tag{5}$$

де e_k – n-вимірний вектор, k-а компонента якого дорівнює 1, а інші – 0.

Нехай для деякого $\tilde{u} \in \Gamma^{+}$ дорівнює нулю $\tilde{k}$-е власне число матриці $A(\tilde{u})$: $\min_{k=1,...,\mathrm{n}}\left(A_{0k} + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{ik}\right) = A_{0\tilde{k}} + \sum_{i=1}^{m} u_i A_{i\tilde{k}} = 0$. Щоб задовольнити умову (5), можна висунути вимогу, щоб $e_{\tilde{k}}^T \left(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \right) \neq 0$ незалежно від вектора $\tilde{u}$, або, іншими словами, щоб $\tilde{k}$ -а координата конічної комбінації векторів $b_i, i = 0,1,...,m$, ніколи не приймала б значення нуль. Це можливо, коли $\tilde{k}$ -ті координати всіх векторів b_i, $i = 0,1,...,m$, мають один і той же знак. Таким чином, узагальнюючи цю умову на всі $\tilde{k} \in \{1,...,n\}$, отримуємо, що умова (5) при $p = 0$ гарантовано виконується, якщо всі вектори b_i, $i = 0,1,...,m$, розташовані в одному й тому ж відкритому ортанті.

Доведення твердження завершено.

Висновки. Досліджено застосування двоїстого підходу для розв'язання неопуклих сепарабельних квадратичних оптимізаційних задач при обмеженнях-нерівностях. Наведено достатню умову знаходження значення і точки глобального екстремуму задач вигляду (3) шляхом знаходження лагранжевої двоїстої оцінки (2). Ця умова є достатньо жорсткою, але заслуговує на цікавість. Її особливість полягає у тому, що вона легко перевіряється і вимагає від матриці гессіана функції Лагранжа лише, щоб її область додатної визначеності була не порожньою.

Відзначимо, що отриманий для двоїстої оцінки результат має місце і для оцінки, отриманої за допомогою SDP-релаксації [3] задачі (3), враховуючи спорідненість цих оцінок [4].

Література

[1] *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. К.: Наук. думка, 1989. 208 с.

[2] *Березовский О.А.* Нулевой разрыв двойственности в квадратичных экстремальных задачах. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. 2017. С. 20–25.

[3] *Nesterov Y., Wolkowicz H., Ye Y.* Semidefinite programming relaxations of nonconvex quadratic optimization. *Handbook of semidefinite programming*. New York: Springer US, 2000. P. 361–419.

[4] *Березовский О.А.* Критерии точности SDP-релаксаций квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. № 6. С. 95–101.

The sufficient condition to find an exact dual bound in a separable quadratic optimization problem

Oleg Berezovskyi

The paper considers nonconvex separable quadratic optimization problems subject to inequality constraints. A sufficient condition is given for finding the value and the point of the global extremum of a problem of this type by calculating the Lagrange dual bound. The peculiarity of this condition is that it is easily verified and requires from the Hessian matrix of the Lagrange function only that its region of positive definiteness is not empty. The result obtained for the dual bound also holds for the bound obtained using SDP relaxation.

Отримано 22.02.21