

Особливості зношування пружної півплощини штампами канонічної форми

Юрій Сачук¹, Олександр Максимук², Іванна Саланда³

¹к.ф.-м.н. Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, 43000, м. Луцьк, проспект Волі, 13
e-mail: sachyuka@gmail.com

²д.ф.-м.н., професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, Львів, вул. Університетська 1

³к.т.н., Кременецька обласна гуманітарно-педагогічна академія ім.Тараса Шевченка, 47003, м. Кременець, вул. Ліцейна, 1

Для задач про контактну взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної, параболічної) з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу досліджено особливості зношування півплощини різними канонічними штампами в різні моменти часу роботи фрикційної пари. Для знаходження областей зношування використано ітераційний алгоритм пошуку, що ґрунтується на використанні екстропляційних поліномів. Для фіксованих моментів часу було чисельно пораховано області зношування при заданій початковій притискаючій силі. Побудовано графіки контактних тисків та проведено аналіз особливостей їх розподілів для різних форм штампів при значному часі роботи фрикційної пари. В результаті отриманих числових даних встановлено особливості зміни області контакту для штампів канонічної форми залежно від часу та кривизни штампів.

Ключові слова: інтергро-диференціальні рівняння, поліноми Чебишова, фрикційна пара, зношування, змінні області контакту, штампи канонічної форми.

Вступ. Важливим напрямком у контактній механіці, який активно розвивається, є задачі з урахуванням тертя і зношування. Теорія тертя й зношування потребує надійних методів розрахунку контактних вузлів. Практично невирішеною є проблема прогнозування часу якісної роботи фрикційних пар і визначення допустимої величини зношування контактуючих поверхонь, за якої працюючий механізм не вийде з ладу [1, 2]. Проведення експериментальних досліджень в цьому напрямку є дуже трудомістким і дорогорватісним. Одним із шляхів вирішення цієї проблеми є побудова математичних моделей процесів тертя і зношування із використанням досягнень механіки контактної взаємодії [3, 4].

Основним параметром, який визначає роботу фрикційної пари, є контактний тиск, тому побудова співвідношень, що дозволяють визначити контактний тиск, є основою математичних моделей [5]. Як правило, це є інтегральні рівняння, але на відміну від інтегральних рівнянь задач класичної контактної механіки у задачах із урахуванням зношування, необхідно враховувати низку специфічних особливостей: зміну області контакту від

просторових координат і часу, залежність розподілу контактного тиску від форми тіл, модель зношування, фрикційний розігрів [2, 4].

1. Постановка задачі

Розглянуто контактну задачу про взаємодію штампів канонічної форми з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу.

У пружну півплощину вдавлюється силою P жорсткий штамп з основою $f(x)$. Крім того штамп рухається зі швидкістю V у напрямку перпендикулярному до площини зношування. Внаслідок цього відбувається абразивне зношування матеріалу за лінійної залежності сили тертя із силою тиску [1, 2]

$$v_*(x, t) = k_1 k_2 V \int_0^t p(x, t) dt, \quad (1)$$

де v_* величина зношування, k_1 — коефіцієнт пропорційності між роботою сили тертя та кількістю зношеного матеріалу, k_2 — коефіцієнт тертя, $p(x, t)$ — контактний тиск.

Враховуючи умову контакту штампа з півплощиною, інтегральне рівняння для визначення контактної сили з урахуванням зношування має вигляд [3, 4]:

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi, t) \frac{d\xi}{\xi - x} = k_1 k_2 V \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) dt - \frac{df(x)}{dx}, \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{\pi E}{2(1 - \nu^2)}$$

де

Контактний тиск у кожен момент часу t повинен задовольняти умови:

$$P = \int_{-a(t)}^{a(t)} p(x, t) dx, \quad p(\pm a(t), t) = 0. \quad (3)$$

Зауважимо, що область контакту змінна в часі, а контактний тиск залежить від просторової та часової координати.

2. Алгоритм розв'язування інтегро-диференціального рівняння та пошук областей зношування

Для розв'язування інтегро-диференціального рівняння використаємо метод розділення змінних з подальшим використанням поліномів Чебишова. Аналогічний підхід до розв'язування такого типу задач був використаний у роботах Галіна Л.О. (зношування балки жорстким штампом) [4], де контактний тиск знаходився з умов взаємодії контактуючих тіл, що враховує зношування.

Контактний тиск шукаємо у вигляді:

$$p(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{2k}(x) e^{-\alpha_{2k} t} \quad (4)$$

Згідно з [4] подаємо власні функції $\phi_{2k}(x)$ у вигляді рядів за поліномами Чебишова другого роду (штамп має заокруглені краї). Відомо [4], що функції $\phi_{2k}(x)$ утворюють базис в просторі L_2 . Із врахуванням умов (3), (4) вони мають вигляд:

$$\phi_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \sqrt{1-x^2} U_{2m}(x) \quad (5)$$

Для подальших міркувань та зручності числових розрахунків введемо безрозмірні величини: $p(x, t) = p'(x', t') \alpha$, $f(x) = f'(x') a$, $x' = \frac{x}{a}$, $t = t' a / (\alpha k_1 k_2 V)$, надалі штрихи упускаємо.

Провівши відповідні підстановки та математичні перетворення, із використанням властивостей поліномів Чебишова [4], отримаємо всі необхідні коефіцієнти ряду контактної тиску (4) із врахуванням форми штампа $f(x)$ та змінної області контакту $a(t)$ [1, 2].

Для визначення $a(t)$ було використано алгоритм запропонований в роботі [5]. Обчислення областей зношування $a(t)$ складається із двох основних етапів: на першому кроці згідно алгоритму описаному у роботі [1, 2] знаходяться початкові області контакту a_1, a_2, a_3 при заданих однакових t_1, t_2, t_3 і при цьому знайдені області задовольняли умову (3); на другому кроці маючи відповідні пари значень із використанням лінійної екстраполяції [6, 7] наближено обчислюється a_4 при заданому t_4 із використанням значень отриманих на попередніх кроках та виконанні (3). В загальному випадку для пошуку a_i при заданому t_i ітераційно будується екстраполяційний поліном на основі отриманих значень $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{i-1}$ при $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{i-1}$.

3. Аналіз числових результатів

При графічному відображенні результатів контактної тиску було враховано зміну області контакту $a(t)$. Тобто, щоб відобразити на одному графіку контактний тиск у різні моменти часу, було розроблено алгоритм зведення отриманих числових даних до однієї системи координат із врахуванням пропорційності відношення поточної області контакту в момент часу t_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) до початкової в момент часу $t_0 = 0$ (задача без зношування) [8, 9].

Контактний тиск для штампа циліндричної форми (рис.1) при заданій силі $P = 0.1828$ та відповідній їй області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.3485$, у фіксовані моменти

часу $t_1 = 0.095$, $t_2 = 0.19$, $t_3 = 0.285$, $t_4 = 0.38$, $t_5 = 0.475$ було знайдено наступні

області контакту $\frac{a_1}{R} = 0.3863$, $\frac{a_2}{R} = 0.4185$, $\frac{a_3}{R} = 0.4502$,

$\frac{a_4}{R} = 0.4816$, $\frac{a_5}{R} = 0.5125$.

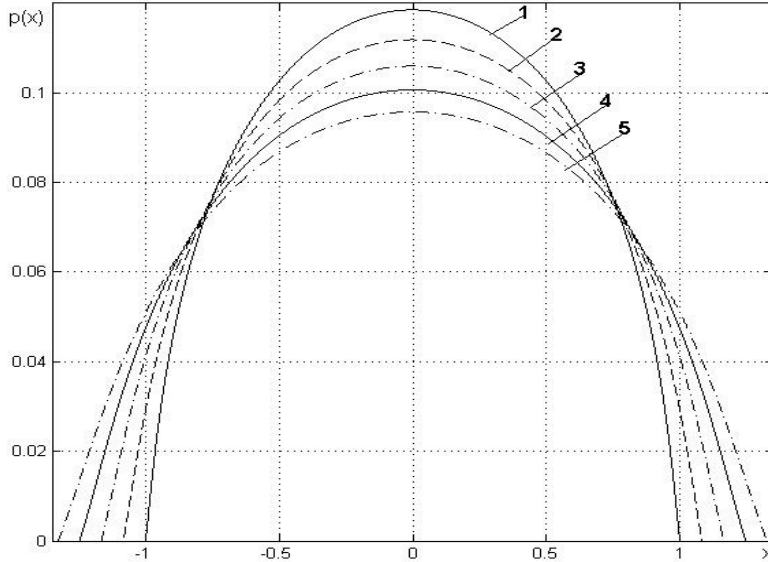


Рис. 1. Контактний тиск для штампа циліндричної форми

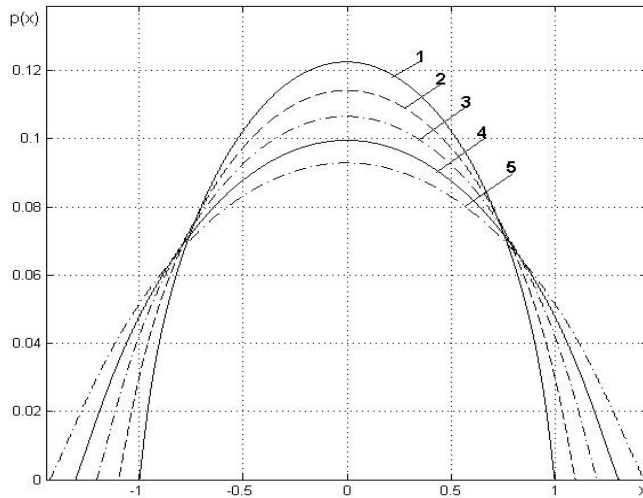


Рис. 2. Контактний тиск для штампа гіперболічної форми

Контактний тиск для штампа гіперболічної форми (рис.2) при заданій силі $P = 0.1828$, $\varepsilon = 0.1$ (ексцентриситет еліптичної та гіперболічної форм

штампів) та відповідній їй області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.3432$, у фіксовані моменти часу $t_1 = 0.095$, $t_2 = 0.19$, $t_3 = 0.285$, $t_4 = 0.38$, $t_5 = 0.475$ було знайдено наступні області контакту $\frac{a_1}{R} = 0.3865$, $\frac{a_2}{R} = 0.4252$, $\frac{a_3}{R} = 0.4655$, $\frac{a_4}{R} = 0.5075$, $\frac{a_5}{R} = 0.553$.

При збільшенні початкової сили P в 2 рази варто відмітити, що для всіх 4-ох форм штампів в кінцевий момент часу роботи фрикційної пари t_5 для штампа циліндричної форми кінцева область контакту $\frac{a_5}{R}$ приблизно збільшується в 1,86 разів (рис. 1), а для штампа гіперболічної форми — у 2 рази (рис. 2).

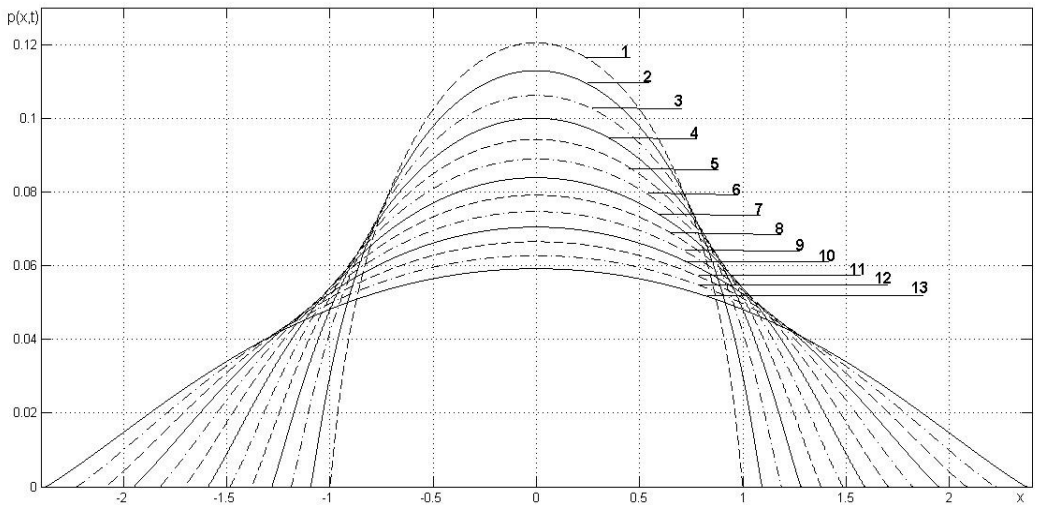


Рис.3. Контактний тиск для штампа параболічної форми

На рис. 3 наведено контактний тиск для штампа параболічної форми при заданій силі $P = 0.1828$ та відповідній їй області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.36516$, у фіксовані моменти часу $t_1 = 0.095$, $t_2 = 0.19$, $t_3 = 0.285$, $t_4 = 0.38$, $t_5 = 0.475$, $t_6 = 0.57$, $t_7 = 0.665$, $t_8 = 0.76$, $t_9 = 0.855$, $t_{10} = 0.95$, $t_{11} = 1.045$, $t_{12} = 1.14$, $t_{13} = 1.235$ було знайдено відповідні області контакту $\frac{a_1}{R} = 0.4079$, $\frac{a_2}{R} = 0.4458$, $\frac{a_3}{R} = 0.484$,

$$\frac{a_4}{R} = 0.5225, \quad \frac{a_5}{R} = 0.5625, \quad \frac{a_6}{R} = 0.605, \quad \frac{a_7}{R} = 0.6487, \quad \frac{a_8}{R} = 0.695, \quad \frac{a_9}{R} = 0.7434, \\ \frac{a_{10}}{R} = 0.7956, \quad \frac{a_{11}}{R} = 0.85, \quad \frac{a_{12}}{R} = 0.907, \quad \frac{a_{13}}{R} = 0.968.$$

Для штампів нескінченної форми також спостерігається ефект зменшення інтенсивності зношування із збільшенням часу взаємодії. Процес такої взаємодії показаний на рис. 4.

На рис. 4 наведено залежності величини області контакту від величини часу роботи фрикційної пари при початковій області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.2$ та $\varepsilon = 0.1$.

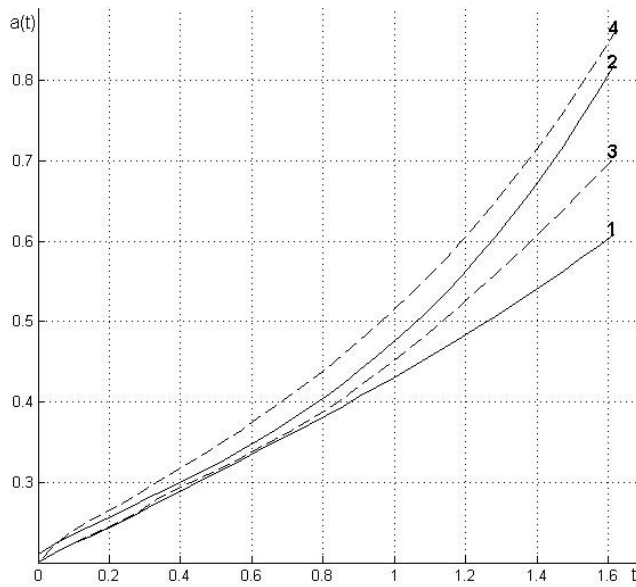


Рис. 4. Залежності величини області контакту від часу

На рис. 4: 1 — циліндрична форма, 2 — еліптична форма, 3 — гіперболічна форма, 4 — параболічна форма штампів.

Для всіх штампів при $t < 0.6$ (час роботи фрикційної пари) розподіли зміни області контакту є близькими, однак при $t > 0.6$ розподіли зміни області контакту починають значно відрізнятися із збільшенням t .

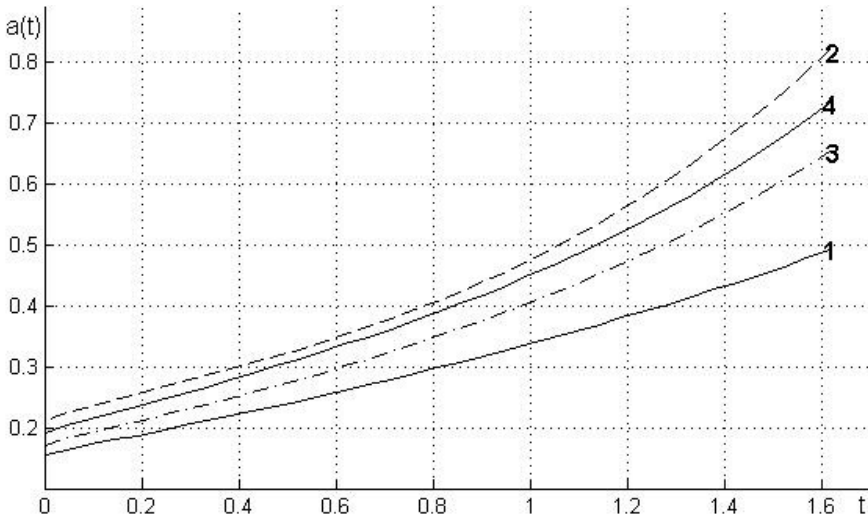


Рис. 5. Залежності величини області контакту від часу

На рис.5 наведено залежності величини області контакту від величини часу роботи фрикційної пари при початковій області контакту для штамів еліптичної та гіперболічної при однаковій притискаючій силі $P=0.0854$ та різних кривизнах штамів.

На рис. 5: 1 — еліптична форма при $\varepsilon=0.1$, 2 — еліптична форма при $\varepsilon=-0.2$, 3 —гіперболічна форма $\varepsilon=-0.01$, 4 — гіперболічна форма штамів при $\varepsilon=0.1$.

Із рис. 5 видно, що для еліптичного та гіперболічного штамів кривизна суттєво впливає на розподіли зміни області контакту в час та процес зношування півплощини в цілому.

Висновки. У статті для контактної задачі про взаємодію жорсткого штампа із пружною півплощиною зі зношуванням матеріалу досліджено особливості зношування півплощини для різних штамів, коли час роботи фрикційної пари є досить значним. Для представлення результатів побудовано графіки контактних тисків для всіх штамів при різних областях контакту в різні часові моменти і виявлено особливі ефекти взаємодії тіл, а також побудовано графіки залежності зміни області контакту від часу, коли час є досить значним та встановлено особливості зміни областей зношування для різних штамів. У результаті числових експериментів встановлено, що для еліптичного та гіперболічного штамів суттєво впливає на зміну в часі області контакту та процес зношування кривизна штамів; спостерігається ефект зменшення інтенсивності зношування із значним збільшенням часу взаємодії для штамів скінченної форми.

Література

- [1] Сачук Ю.В. Узагальнена проблема на власні значення в задачах контактної взаємодії з урахуванням зношування матеріалу // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. —2015. —№21. — С. 205-212.

- [2] Сачук Ю.В., Максимук О.В. Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми // Вісник Тернопільського національного університету. 2015. — №2. — С. 70-80.
- [3] Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. — М.: Наука. — 2001. — 478с.
- [4] Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. — Киев: Нук. думка. —1988. —280с.
- [5] Сачук Ю.В., Максимук О.В. Обчислення областей контакту для задач контактної взаємодії канонічних штампів із півплощиною з урахування зношування. V науково-технічна конференція «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації»: зб. наук. праць наук.-тех. конф. (Львів, 4–5 жовтня 2018 р.). Львів, 2018. С. 24–25.
- [6] Шарый С.П. Курс вычислительных методов. —Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2014. —501 с.
- [7] Todd Young, Martin J. Mohlenkamp Introduction to Numerical Methods and Matlab Programming for Engineers. — Ohio: Department of Mathematics Ohio University Athens, 2017. —173 p.
- [8] Sachuk Yu. V., Maksymuk O. V. Analysis of the stress-strain state of a body under the action of rigid punches of different shapes. Journal of Mathematical Sciences. —2017. — 220, No. 2. — P. 204-212.
- [9] Сачук Ю.В., Максимук О.В. Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. —2014. — №20. —С. 180–187.

Features of wear of the elastic half-plane by stamps of the canonical form

Uriy Sachuk, Oleksandr Maksymuk, Ivanna Salanda

For the problems of contact interaction of canons of canonical form (cylindrical, elliptical, hyperbolic, parabolic) with elastic half-plane with consideration of material wear, the features of half-plane wear by different canonical dies at different moments of friction pair time were investigated. An iterative search algorithm based on extrapolation polynomials was used to find wear areas. For fixed moments, the wear areas were numerically calculated at a given initial clamping force. The graphs of the contact pressures were constructed and the peculiarities of their distributions were analyzed for different forms of dies with a considerable time of friction pair operation. As a result of the obtained numerical data, it is established that the contact area changes for canonical stamps depending on the time and curvature of the stamps.

Отримано 28.03.19