УДК 517.5

Побудова квазіспектральних ортогональних поліномів на базі многочленів Лаґерра

Ярослав П'янило[1], Валентина Собко[2]

[1]д.т.н., с.н.с., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: pjanylo@cmm.lviv.ua
[2] Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: vg_sobko@ukr.net

У базисі многочленів Лагерра побудовано ортогональну систему поліномів, розглянуто задачу апроксимації функції в побудованому ортогональному базисі. Під час обчислювального експерименту на модельних задачах досліджено вплив різного роду похибок на апроксимацію.

Ключові слова: спектральні методи, ортогональні та квазіортогональні многочлени, інтегральні оператори, власні значення.

Вступ. Спектральні методи використовуються в багатьох галузях науки і техніки — оброблення цифрової інформації, розв'язування крайових задач математичної фізики, електрорадіотехніці тощо. Їх суть полягає в тому, що функції, які входять у модель, подають у вигляді ортогональних рядів за вибраним базисом. Знаходження розв'язку зводиться до обчислення коефіцієнтів ортогонального ряду шуканого розв'язку. Як правило, ортогональні базиси будувались виходячи з конкретних задач. Їх вибір часто диктується в задачах математичної фізики відповідними диференціальними рівняннями, областю визначення задач. Так, наприклад, використання напівбезмежного ортогональног базису до розв'язування задач, областю визначення яких є скінченна область, вимагає нелійної заміни змінних, що приводить до значного ускладнення математичного та обчислювального апарату. Тому вибір ортогонального базису слід узгоджувати з областю визначення шуканого розв'язку.

Є багато способів побудови ортогональних базисів. Основними є: використання схеми Шмідта та побудова власних значень та власних функцій інтегральних операторів. Зазначимо, що схема Шмідта на практиці дозволяє побудувати невелику кількість ортогональних функцій, так як зводиться до необхідності розв'язання погано обумовленої системи алгебраїчних рівнянь.

В роботах [1-6] на базисі многочленів Чебишева першого роду побудовані біортогональні многочлени. Досліджено їх властивості та на базі побудованих многочленів побудовано аналітико-числоваі методи розв'язування задач масопереносу. Враховуючи їх ефективність, доцільно побудувати аналогічні біортогональні многочлени на пів безмежному проміжку. Поряд з тим, що многочлени Чебишева-Лагерра є ортогональними на пів безмежному проміжку, вони мають ще і ту перевагу, що в їх базисі інтегральна згортка переходить безпосередньо в згортку рядів. Тим самим виключається процедура дискретизації, внаслідок якої виникає похибка, яка важко піддається оцінюванню.

Метою роботи є побудова та дослідження біортогональних многочленів на базі многочленів Чебишева-Лагерра.

1. Побудова квазіспектральних поліномів

Розглянемо оператор інтегрування $L : L_{2,\varpi}[-1,1] \to L_{2,\varpi}[-1,1]$ з ваговою функцією $\varpi(x) = \exp(-t)$, який для $f(t) \in L_{2,\varpi}[0,\infty]$ ставить у відповідність вираз

$$Lf(t) = \int_{-1}^{t} dt_1 \int_{-1}^{t_1} f(t_2)\,dt_2 = \int_{-1}^{t} (t - t_1) f(t_1)\,dt_1 . \tag{1}$$

Відомо [7], що вираз (1) не має відмінних від нуля власних значень, тому відповідна задача про побудову власних функцій для цього оператора позбавлена сенсу. Отже, розглянемо відповідну квазіспектральну задачу.

2. Квазіспектральна задача для інтегрального оператора

Для заданого $n = 1, 2, ...$ знайти такі значення параметра λ, при яких рівняння

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \varphi(t_2)\,dt_2 = -\lambda\left(\varphi(t) - \int_0^t \varphi(t_1)\,dt_1\right) + \tau_1 L_{n+1}(t) + \tau_0 L_0(t) \tag{2}$$

має ненульові поліноміальні розв'язки $\varphi = \varphi(t) \in L_{2,\varpi}[0,\infty]$ степеня $\le n$, де τ_1, τ_0 деякі параметри, а $L_{n+1} = L_{n+1}(t)$ та $L_0 = L_0(t)$ задані (і зафіксовані) поліноми Лаґерра відповідно степеня рівного $n+1$ та нульового.

3. Квазіспектральна задача для диференціального оператора

Для заданого $n = 1, 2, ...$ знайти такі значення параметра $\bar{\lambda}$, при яких рівняння

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -\bar{\lambda}\psi(t) + \frac{d\psi(t)}{dt} + \bar{\tau}_1 \frac{dL_{n+1}(t)}{dt} \tag{3}$$

має ненульові поліноміальні розв'язки $\psi = \psi(x) \in \tilde{L}_{2,0}[0,\infty]$ степеня $\le n+1$, де $\bar{\tau}_1$ деякий параметр, а $L_{n+1} = L_{n+1}(t)$ та $L_0 = L_0(t)$ задані (і зафіксовані) поліноми Лаґерра відповідно степеня рівного $n+1$ та нульового.

$\tilde{L}_{2,0}\left[0,\infty\right]$ — це такий повний підпростір функцій простору $L_{2,\varpi}\left[0,\infty\right]$, для яких виконуються умови $\psi\left(0\right)=0$.

Твердження 1. При $\overline{\lambda}=1/\lambda$ та $\overline{\tau}_1=\tau_1/\lambda$ рівняння (2), (3) еквівалентні між собою.

Доведення. Нехай

$$\psi\left(t\right)=\int\limits_0^t\varphi\left(t_1\right)dt_1\,. \tag{4}$$

Візьмемо похідну по t від обох частин рівняння (4) і дістанемо

$$\frac{d\psi\left(t\right)}{dt}=\varphi\left(t\right). \tag{5}$$

Візьмемо похідну по t від обох частин рівняння (2) і дістанемо

$$\int\limits_0^t\varphi\left(t_1\right)dt_1=-\lambda\left(\frac{d\varphi\left(t\right)}{dt}-\varphi\left(t\right)\right)+\tau_1\frac{dL_{n+1}\left(t\right)}{dt}\,. \tag{6}$$

Підставимо рівності (4) та (5) в отримане рівняння (6) і дістанемо

$$\psi\left(t\right)=-\lambda\left(\frac{d^2\psi\left(t\right)}{dt^2}-\frac{d\psi\left(t\right)}{dt}\right)+\tau_1\frac{dL_{n+1}\left(t\right)}{dt}$$

Або

$$\frac{d^2\psi\left(t\right)}{dt^2}=-\frac{1}{\lambda}\psi\left(t\right)+\frac{d\psi\left(t\right)}{dt}+\frac{\tau_1}{\lambda}\frac{dL_{n+1}\left(t\right)}{dt}\,. \tag{7}$$

В рівнянні (7) введемо позначення, описані у твердженні 1, і дістанемо рівняння (3).

Зінтегруємо обидві частини рівняння (3) по t_1 в межах від $t_1=0$ до $t_1=t$ дістанемо

$$\frac{d\psi\left(t\right)}{dt}-\left.\frac{d\psi\left(t\right)}{dt}\right|_{t=0}=-\overline{\lambda}\int\limits_0^t\psi\left(t_1\right)dt_1+\psi\left(t\right)-\psi\left(0\right)+\overline{\tau}_1\left(L_{n+1}\left(t\right)-L_{n+1}\left(0\right)\right).$$

Підставимо рівності (4), (5) в останнє рівняння та враховуючи, що $\psi\left(0\right)=0$, дістанемо

$$\varphi\left(t\right)-\varphi\left(0\right)=-\overline{\lambda}\int\limits_0^t dt_1\int\limits_0^{t_1}\varphi\left(t_2\right)dt_2+\int\limits_0^t\varphi\left(t_1\right)dt_1+\overline{\tau}_1L_{n+1}\left(t\right)-\overline{\tau}_1L_{n+1}\left(0\right)$$

або

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \varphi(t_2)\,dt_2 = -\lambda\left(\varphi(t) - \int_0^t \varphi(t_1)\,dt_1\right) + \tau_1 L_{n+1}(t) + \left(\lambda\varphi(0) - \tau_1 L_{n+1}(0)\right). \qquad (8)$$

Враховуючи рівності, описані у твердженні 1, із рівняння (8) дістанемо (2), де $\tau_0 = \lambda\varphi(0) - \tau_1 L_{n+1}(0)$.

Твердження доведено.

Справедливими є наступні рівності

$$\int_0^\infty \exp(-t)\varphi_i^{n-1}(t)\varphi_j^{n-1}(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \qquad (9)$$

$$\int_0^\infty \exp(-t)\psi_i^{n}(t)\psi_j^{n}(t)\,dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ -\lambda_i, & i = j \end{cases}.$$

Якщо обмежитись точністю обчислення $q = 10^{-8}$, то для деяких значень n перші біортогональні многочлени мають вигляд:

$n = 2$ -

$$\varphi_1(t) = 0.70710676 L_0(t) - 0.70710676 L_1(t),$$

$$\varphi_2(t) = -0.70710676 L_0(t) - 0.70710676 L_1(t),$$

та $\lambda_1 = 2.9999999$, $\lambda_2 = 1.0000000$;

$n = 3$ -

$$\varphi_1(t) = 0.49999999 L_0(t) - 0.70710676 L_1(t) + 0.49999998 L_2(t),$$

$$\varphi_2(t) = -0.70710675 L_0(t) + 0.000000047 L_1(t) + 0.70710676 L_2(t),$$

$$\varphi_3(t) = 0.50000003 L_0(t) + 0.70710674 L_1(t) + 0.49999994 L_2(t),$$

та $\lambda_1 = 3.4142136$, $\lambda_2 = 2.0000000$, $\lambda_3 = 0.5857866$;

$n = 4$ -

$$\varphi_1(t) = -0.37174799 L_0(t) + 0.60150096 L_1(t) - 0.60150089 L_2(t) + 0.37174796 L_3(t),$$

$$\varphi_2(t) = -0.60150093 L_0(t) + 0.37174801 L_1(t) + 0.37174801 L_2(t) - 0.60150091 L_3(t),$$

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2019, вип. 28, 29, 65-72

$$\varphi_3(t) = -0.60150082L_0(t) - 0.37174797L_1(t) + 0.37174814L_2(t) + 0.60150099L_3(t),$$

$$\varphi_4(t) = 0.37174811L_0(t) + 0.60150104L_1(t) + 0.60150091L_2(t) + 0.37174796L_3(t),$$

та $\lambda_1 = 3.6180340$, $\lambda_2 = 2.6180341$, $\lambda_3 = 1.3819658$, $\lambda_4 = 0.38196601$.

4. Обчислювальний експеримент

За отриманими теоретичними результатами проводився обчислювальний експеримент на модельних прикладах. В ході обчислювального експерименту досліджувався вплив порядку многочленів Лагерра, порядку часткової суми біортогонального ряду та заданої точності обчислення власних значень на точність обчислень коефіцієнтів квазіортогонального ряду та порядку його часткової суми на процес відновлення самої функції.

Приклад 1. Нехай $\Phi(t) = \cos t$. Знайдемо коефіцієнти та часткові суми $\Phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \psi_i^n(t)$. Невідомі коефіцієнти φ_i знаходимо так: $\varphi_i = h_i^{-1} \int_0^\infty \exp(-t)\Phi(t)\psi_i^n(t)dt$, $h_i = \int_0^\infty \exp(-t)\psi_i^n(t)\psi_i^n(t)dt$, $i = 1,...,n$.

Таблиця 1

Залежність стійкості обчислень коефіцієнтів від похибки q для $n = 10$

φ_i	$q = 10^{-6}$	$q = 10^{-8}$	$q = 10^{-12}$	$q = 10^{-16}$	$q = 10^{-20}$
φ_1	0.345380(-1)	0.34537925(-1)	0.34537924(-1)	0.34537924(-1)	0.34537924(-1)
φ_2	-0.703917(-1)	-0.70391764(-1)	-0.70391765(-1)	-0.70391765(-1)	-0.70391765(-1)
φ_3	0.111696	0.11169636	0.11169636	0.11169636	0.11169636
φ_4	0.158209	0.15820902	0.15820902	0.15820902	0.15820902
φ_5	0.220785	0.22078483	0.22078484	0.22078484	0.22078484
φ_6	0.294297	0.29429734	0.29429733	0.29429733	0.29429733
φ_7	0.376931	0.37693164	0.37693164	0.37693164	0.37693164
φ_8	0.209394	0.20939397	0.20939397	0.20939397	0.20939397
φ_9	-0.155816	-0.15581563	-0.15581563	-0.15581563	-0.15581563
φ_{10}	0.954662(-1)	0.95466287(-1)	0.95466287(-1)	0.95466287(-1)	0.95466287(-1)

Множник $(-N)$ означає $\times 10^{-N}$.

Таблиця 2

Вплив порядку та кількості поліномів Лаґерра на обчислення коефіцієнтів φ_i, які використовуються для побудови ортогональних многочленів з точністю обчислення $q = 10^{-10}$

φ_i	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 12$
φ_1	-0.06753453337	0.04674341894	0.03453792436	0.02670075762
φ_2	-0.1500889177	0.09714785153	-0.07039176462	-0.05447219904
φ_3	0.2448912258	-0.1573456953	0.1116963576	0.08440396922
φ_4	0.4195776835	-0.2333113758	0.1582090235	-0.1182561085
φ_5	0.3087792196	0.3417461616	0.2207848371	0.1578145636
φ_6	0.2700227014	0.3954905314	0.2942973331	0.2068074112
φ_7		0.001574283913	0.3769316445	0.2666780882
φ_8		-0.2082959709	0.2093939734	0.3325839247
φ_9			-0.1558156264	0.3033408241
φ_{10}			0.09546628743	0.01117834954
φ_{11}				-0.1623094533
φ_{12}				0.07898558019

Вище подані результати обчислювального експерименту для періодичної парної функції. Обчислювальний експеримент проводився і для монотонних функцій.

Приклад 2. Нехай $\Phi(t) = \exp(-t)$. Результати обчислень подані в таблицях.

Таблиця 3.

Вплив порядку та кількості поліномів Лаґерра на обчислення коефіцієнтів φ_i, які використовуються для побудови ортогональних многочленів з точністю обчислення $q = 10^{-10}$

φ_i	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 12$
φ_1	-0.05396612221	0.03682490108	0.2718692729(-1)	0.2113265170(-1)
φ_2	-0.1113973897	0.07512959554	-0.5511400985(-1)	-0.4267858301(-1)
φ_3	0.1772312470	-0.1166803382	0.8459318481(-1)	0.6507411721(-1)
φ_4	0.2529549191	-0.1629790604	0.1164379245	-0.8877421676(-1)
φ_5	0.3352494286	0.2157831355	0.1515843873	0.1142810323
φ_6	-0.3256824067	0.2718997403	0.1904878866	0.1420472201
φ_7		0.3137120647	0.2324205354	0.1723765438
φ_8		0.2576871326	0.2706414649	0.2047845676
φ_9			0.2822131896	0.2366966919
φ_{10}			-0.2061381183	0.2592942345
φ_{11}				0.2500768107
φ_{12}				-0.1680093087

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2019, вип. 28, 29, 65-72

Таблиця 4.

Точне значення функції $\Phi(t_i)$ та наближені значення $\Phi_n(t_i)$ функції для різних значень n при $q=10^{-8}$

t_i	$\Phi(t_i)$	$\Phi_6(t_i)$	$\Phi_8(t_i)$	$\Phi_{10}(t_i)$	$\Phi_{12}(t_i)$
0	1	1	1	1	1
0.1	0.90483742	0.90787994	0.90568707	0.90506768	0.90489844
0.2	0.81873075	0.82336023	0.81991465	0.81902234	0.81880035
0.3	0.74081822	0.74593844	0.74198506	0.74106822	0.74086824
0.4	0.67032005	0.67513572	0.67124816	0.67047437	0.67033909
0.5	0.60653066	0.61049619	0.60709879	0.60657016	0.60651823
0.6	0.54881164	0.55158627	0.54897442	0.54874095	0.54877368
0.7	0.49658530	0.49799386	0.49635282	0.49642407	0.49653104
0.8	0.44932896	0.44932792	0.44874992	0.44910510	0.44926850
0.9	0.40656966	0.40521764	0.40571757	0.40631421	0.40651247
1	0.36787944	0.36531188	0.36684153	0.36762290	0.36783338
2	0.13533528	0.13308534	0.13610043	0.13567199	0.13540220
3	0.49787068(-1)	0.5806368(-1)	0.5104185(-1)	0.4961182(-1)	0.4967335(-1)
4	0.18315639(-1)	0.2371038(-1)	0.1598215(-1)	0.1773381(-1)	0.1833185(-1)
5	0.67379470(-2)	-0.57826(-2)	0.346201(-2)	0.730910(-2)	0.696659(-2)
6	0.24787522(-2)	-0.245536(-1)	0.492947(-2)	0.406110(-2)	0.234272(-2)
7	0.91188197(-3)	-0.152149(-1)	0.1104968(-1)	0.104020(-2)	0.10597(-3)
8	0.33546263(-3)	0.299573(-1)	0.990380(-2)	-0.28649(-2)	-0.5386(-3)
9	0.12340980(-3)	0.967306(-1)	-0.64263(-2)	-0.42674(-2)	-0.356(-4)
10	0.45399930(-4)	0.145577	-0.343300(-1)	0.9750(-3)	-0.3480(-3)

Висновки. На базі многочленів Лагерра побудовано квазіортогональний базис - власні фунції та алгоритм для визначення власних значень, доведена їх біортогональність та сформульовані квазіспектральні задачі для інтегрального і диференціального операторів. Отримані теоретичні результати апробовані на модельних прикладах. Враховуючи ефективність квазіортогональних та біортогональних базисів доцільно продовжити дослідження цих базисів стосовно розв'язування прикладних задач, зокрема розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь типу згортки.

Література

[1] *П'янило Я. Д.* Побудова та дослідження біортогональних поліномів на базі многочленів Чебишева / Я. Д. П'янило, В. Г. Собко // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2013. — Вип. 11. — С. 135-141.

[2] *Собко В. Г.* Побудова та дослідження алгоритму розв'язування задач математичної фізики за допомогою біортогональних поліномів / В. Г. Собко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. — 2015. — Вип. 4. — С. 176-180.

[3] *П'янило Я.* Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біортогональних поліномів / Я. П'янило, В. Собко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2014. — Вип. 19. — С. 146-156.

[4] *П'янило Я.* Дослідження стійкості спектрального методу визначення розподілу тиску вздовж трубопроводу в нестаціонарному випадку в базисі біортогональних поліномів / Я. П'янило, В. Собко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2016. — Вип. 24. — С. 86-92.

[5] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный аналіз / Канторович Л. В., Акилов Г. П. — М.: Наука, 1984. — 752 с.
[6] *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицями / Абрамович М., Стиган И. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
[7] *Глетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина / Глетчер К — М.: Мир, 1988. — 352с.
[8] *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / Дзядык В. К. — К.: Наук. думка, 1998. — 370 с.
[9] *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / Дзядык В. К. — М.: Наука, 1977. — 512 с.
[10] *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление / Диткин В.А., Прудников А.П. — М.: Высшая школа, 1975. 407 с.

Constructing and researching quasispectral orthogonal polynomials on the basis of Lagerr polynomials

Yaroslav Pyanylo[1], Valentina Sobko[2]

An orthogonal system of polynomials is constructed in the basis of Lagerra polynomials, and the problem of approximation of a function in the constructed orthogonal basis is considered. During the computational experiment, the influence of various errors on the approximation was investigated on model problems.

Отримано 03.07.19