

Термопружність ізотропних тіл із недеформівними нитковими включеннями

Ярослав Пастернак¹, Георгій Сулим², Наталія Ільчук³

¹ доц., д.ф.-м.н., Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, 43018 Луцьк, yaroslav.pasternak@gmail.com

² проф., д.ф.-м.н., Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, вул. Наукова, 36, 79000 Львів, gtslym@gmail.com

³ доц., к.ф.-м.н., Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, 43018 Луцьк

У роботі побудовано інтегральні рівняння теплопровідності та термопружності ізотропних тіл із недеформівними ідеально теплопровідними нитковими включеннями. З'ясовано, що незважаючи на порядок особливості, отримані інтегральні рівняння є гіперсингулярними унаслідок симетрії ядер. Знайдено позаінтегральні члени цих рівнянь. Запропоновано схему методу граничних елементів для числового розв'язування сформульованих задач. Подано числовий приклад.

Ключові слова: ниткове включення, термопружність, інтегральне рівняння, гіперсингулярний.

Вступ. Задачі термомеханіки елементів конструкцій із включеннями широко висвітлені у сучасній науковій літературі, оскільки вони є тісно пов'язаними із методами аналізу ефективних характеристик, міцності та руйнування композитних матеріалів. Зокрема, в [1] розроблено безсітковий метод для аналізу стаціонарної теплопровідності у анізотропних структурно-неоднорідних тілах. У роботі [2] запропоновано технологію гомогенізації для визначення ефективних теплових властивостей композитів та використано її для аналізу експериментальних даних із термографічних досліджень. У [3] отримано аналітичний підхід до визначення ефективних теплових властивостей композитних матеріалів з еліпсоїдальними включеннями.

Зважаючи на геометричні особливості існуючих типів неоднорідностей, їх варто поділити на 3 класи: 1) глобулярні включення, розміри яких у різних напрямках є порівнюваними; 2) тонкі стрічкові чи оболонкові включення, один з розмірів яких значно менший за інші; та 3) ниткові неоднорідності, один із розмірів яких значно більший за інші.

До класу об'ємних неоднорідностей належать глобулярні дефекти конструктивних елементів або глобулярне наповнення композиційних матеріалів, яке на даний час практично не використовується. Такі включення, в основному, вивчаються в рамках загальних підходів термомеханіки. Аналітичні розв'язки для анізотропних твердих тіл із еліпсоїдальними включеннями представлені у [3].

Тонке стрічкоподібне, пластиноподібне і дротяне наповнення широко використовується в сучасних композиційних матеріалах, включаючи нанокompозити. Слід зазначити, що сучасні вуглецеві нано-нитки, наприклад, графен, має дуже високу теплопровідність [4], що безумовно, слід враховувати при числовому термомеханічному аналізі вуглецевих нанокompозитів. Однак вивчення тонкостінних та ниткоподібних включень є складним через низьку точність загальних числових підходів (наприклад, методів скінченних та граничних елементів) при моделюванні тонких об'єктів. Тому тонкі і ниткоподібні включення вивчаються за допомогою спеціальних підходів (наприклад, див. [5]), які дають можливість зменшити кількість ступенів вільності та враховувати лише дво- чи одновимірну геометрію неоднорідності при тривимірному формулюванні основної задачі. Тонкі стрічкоподібні і оболонкові включення, зокрема, можна вивчати за допомогою методу функції стрибка, який замінює неоднорідність поверхнею розриву фізико-механічних полів (див. [6]). Однак цей підхід не може бути безпосередньо застосований до вивчення ниткових включень.

Наскільки відомо авторам, не існує жодної публікації, що стосувалася би задач спеціальних підходів вивчення задач термомеханіки тіл із ниткоподібними неоднорідностями. Існують лише поодинокі публікації, у яких здійснені аналітичні та експериментальні дослідження нано-дротиків на основі підходів теоретичної фізики [7, 8]. Очевидно, що задачі термомеханіки тіл із нитковими включеннями стосується значно ширшого кола питань, зокрема й підходів аналізу сталі-фібро-бетонів, фібри яких можна розглядати як жорсткі теплопровідні ниткові включення. Тому у цій роботі запропоновано підхід до отримання інтегральних рівнянь та методику їх числового розв'язування для аналізу стаціонарної теплопровідності та термопружності середовища, що містить ідеально провідне недеформівне ниткове включення.

1. Теплопровідність ізотропних середовищ із нитковими ідеально теплопровідними включеннями

Розглянемо анізотропне середовище, що містить ідеально теплопровідне ниткове включення сталого радіуса ρ , середня лінія L якого є гладкою розімкнутою кривою (див. рис. 1).

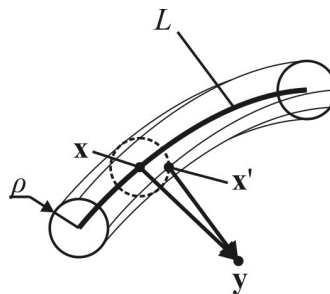


Рис. 1. Моделювання ниткового включення

Третя інтегральна формула Гріна для просторових задач теплопровідності тіла з таким включенням запишеться як [9]

$$\theta(\mathbf{y}) = \iint_S [\Theta(\mathbf{x}', \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}') - H(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}')] dS(\mathbf{x}') + \theta^\infty(\mathbf{y}), \quad (1)$$

де θ — температура; h_n — тепловий потік нормальний до поверхні S неоднорідності; $\theta^\infty(\mathbf{y})$ — поле температур від прикладеного на безмежності теплового навантаження. Ядра інтегральної формули (1) для ізотропного середовища мають вигляд [9]

$$\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi k_t |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (2)$$

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -k_t n_i \Theta_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (3)$$

де k_t — коефіцієнт теплопровідності; $n_i(\mathbf{x})$ — компоненти вектора одиничної нормалі до поверхні включення у точці \mathbf{x} .

У випадку малих радіусів ρ ниткової неоднорідності порівняно з її характерною довжиною L , можна вважати, що відповідно до (2)

$$\Theta(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \approx \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4)$$

а відповідно до (3)

$$\int_0^{2\pi} H(\mathbf{x}', \mathbf{y}) d\vartheta(\mathbf{x}') = 0, \quad (5)$$

де ϑ — полярний кут у нормальному перерізі ниткового включення у точці \mathbf{x} .

Оскільки включення вважається ідеально теплопровідним, то його температура $\theta(\mathbf{x})$ є сталою, а тому для малих ρ із урахуванням співвідношень (4) та (5) перепишемо рівняння (1) як

$$\theta(\mathbf{y}) = \int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + \theta^\infty(\mathbf{y}), \quad (6)$$

де

$$\gamma(\mathbf{x}) = \rho \int_0^{2\pi} h_n(\mathbf{x}') d\vartheta(\mathbf{x}') \quad (7)$$

є шуканим розподілом теплоти уздовж лінії включення.

Невідома функція $\gamma(\mathbf{x})$ може бути визначена шляхом розв'язування інтегрального рівняння, що отримується із формули (6) шляхом наближення точки \mathbf{y} внутрішності середовища до деякої точки \mathbf{x}_0 на лінії ниткового включення

$$\theta^0 = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}_0} \int_L \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + \theta^\infty(\mathbf{x}_0), \quad (8)$$

де θ^0 є сталою температурою включення, що вважається ідеально теплопровідним.

До рівняння (8) слід також додати рівняння теплового балансу включення

$$\int_L \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + H_0 = 0, \quad (9)$$

де H_0 — зовнішня теплота, підведена до включення.

Слід зазначити, що незважаючи на те, що ядро $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ має особливість типу $1/r$, інтегральне рівняння (8) є гіперсингулярним і не може розглядатися в сенсі рівняння типу Коші, оскільки ядро є симетричним, тобто, $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Тому вивчимо це рівняння у деталях.

Вважатимемо, що лінія L , яка моделює ниткове включення, є гладкою просторовою кривою. Введемо розімкнутий контур L_ε малого радіусу $\varepsilon \rightarrow +0$, що оточує точку колокації \mathbf{x}_0 (див. рис. 2). Тоді рівняння (8) запишемо так

$$\int_{L \setminus L_\varepsilon} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}_0) \gamma(\mathbf{x}_0) = \theta^0 - \theta^\infty(\mathbf{x}_0), \quad (10)$$

де

$$B(\mathbf{x}_0) = \int_{L_\varepsilon} \Theta(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}). \quad (11)$$

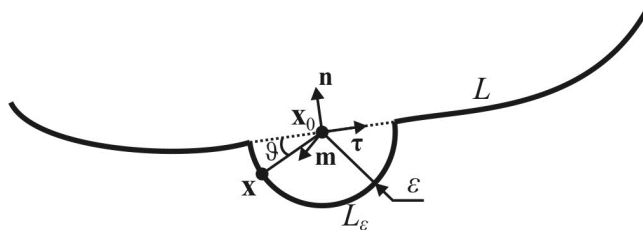


Рис. 2. Обчислення позаінтегральних членів

Підставивши рівняння (2) в (11) отримаємо, що

$$B(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4k_t} \quad (12)$$

і є незалежним від просторової орієнтації лінії включення.

2. Термопружність ізотропних середовищ із недеформівними нитковими включеннями

Тепер розглянемо ізотропне термопружне середовище, що містить ниткове включення. Розподіл переміщень, зумовлений включенням, можна отримати на основі застосування розширеної формули Сомільяни [9]

$$u_i(\mathbf{y}) = \iint_S (U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}') - T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}')) dS(\mathbf{x}') + \iint_S (V_i(\mathbf{x}', \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}') + R_i(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}')) dS(\mathbf{x}') + u_i^\infty(\mathbf{y}), \quad (13)$$

де u_i — компоненти вектору переміщень; $u_i^\infty(\mathbf{y})$ — поле переміщень, зумовлене навантаженням середовища на безмежності; $t_i = \sigma_{ij} n_j$ — компоненти вектора

напружень; σ_{ij} — компоненти тензора напружень. Тут і далі використовується правило підсумовування Ейнштейна за індексом, що повторюється.

Відповідно до [9], ядра інтегральної формули (13) для випадку лінійно ізотропного матеріалу тіла можна записати у такому вигляді:

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}}{16\pi\mu(1-\nu)} [(3-4\nu)\delta_{ij} + \tau_i\tau_j],$$

$$T_{qi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{ijkm}n_j(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_m}U_{qk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (14)$$

$$V_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(1+\nu)\alpha}{8\pi(1-\nu)k_i}\tau_i, \quad R_i = k_in_j(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_j}V_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (15)$$

де $C_{ijkm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{km} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk})$ — компоненти тензора модулів пружності матеріалу; λ, μ — сталі Ляме; $\nu = \lambda/(2(\lambda + \mu))$ — коефіцієнт Пуассона; α — коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу; τ — напрямні косинуси вектора $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Відповідно до моделей жорстких недеформівних включень, переміщення поверхні S включення можна записати у вигляді

$$u_i(\mathbf{x}') = u_i^0 + \varepsilon_{ijk}\omega_j^0x'_k, \quad (16)$$

де u_i^0 та ω_j^0 є відповідно переміщенням та поворотом включення як жорсткого цілого; ε_{ijk} — компоненти тензора Леві — Чівіті.

Підставляючи (16) у (13) та вважаючи радіус ρ включенням значно меншим за його характерну довжину L та $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \gg \rho$, отримаємо

$$u_i(\mathbf{y}) = \int_L (U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})p_j(\mathbf{x}) + V_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})\gamma(\mathbf{x}))dL(\mathbf{x}) + u_i^\infty(\mathbf{y}), \quad (17)$$

де

$$p_j(\mathbf{x}) = \rho \int_0^{2\pi} t_j(\mathbf{x}')d\vartheta(\mathbf{x}'), \quad (18)$$

оскільки відповідно до рівнянь (14), (15) для малих ρ ядра $U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \approx U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $V_i(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \approx V_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ та

$$(u_i^0 + \varepsilon_{ijk}\omega_j^0x'_k)\rho \int_0^{2\pi} T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y})d\vartheta(\mathbf{x}') = 0, \quad \theta^0\rho \int_0^{2\pi} R_i(\mathbf{x}', \mathbf{y})d\vartheta(\mathbf{x}') = 0, \quad (19)$$

бо

$$\int_0^{2\pi} T_{qi}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) d\vartheta(\mathbf{x}') \approx C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_m} U_{qk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \int_0^{2\pi} n_j(\mathbf{x}') d\vartheta(\mathbf{x}') = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} R_i(\mathbf{x}', \mathbf{y}) d\vartheta(\mathbf{x}') \approx k_i \frac{\partial}{\partial x_j} V_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \int_0^{2\pi} n_j(\mathbf{x}') d\vartheta(\mathbf{x}') = 0.$$
(20)

У рівняннях (18)–(20) ϑ є полярним кутом, а інтегрування здійснюється по колу з центром у точці \mathbf{x} нормального (стосовно L) перерізу ниткового включення.

Відповідно до (17), задачу термопружності для жорсткого ниткового включення можна розв'язати, визначивши відповідні функції $p_j(\mathbf{x})$. Для цього необхідно спрямувати точку \mathbf{y} внутрішності до деякої точки \mathbf{x}_0 на лінії L . Тоді, відповідно до (17) отримаємо таке крайове інтегральне рівняння

$$u_i(\mathbf{x}_0) = \int_{L \setminus L_\varepsilon} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) p_j(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) +$$

$$+ p_j(\mathbf{x}_0) \int_{L_\varepsilon} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + \int_L V_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + u_i^\infty(\mathbf{x}_0),$$
(21)

де як і у випадку задачі теплопровідності невелику ділянку лінії L , яка включає точку \mathbf{x}_0 , замінюємо півколом L_ε радіуса $\varepsilon \rightarrow +0$, щоб визначити позаінтегральні члени.

Позначивши позаінтегральний член

$$A_{ij}(\mathbf{x}_0) = \int_{L_\varepsilon} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}),$$
(22)

з огляду на (14) можна довести, що він залежить лише від напрямку дотичної до L у точці \mathbf{x}_0 та пружних сталей матеріалу.

Тому відповідно до (16), (21) та (22) крайові інтегральні рівняння для ізотропного термопружного середовища, що містить тонке жорстке ниткове включення запишуться у вигляді

$$\int_{L \setminus L_\varepsilon} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) p_j(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + A_{ij}(\mathbf{x}_0) p_j(\mathbf{x}_0) =$$

$$= u_i^0 + \varepsilon_{ijk} \omega_j^0 x_k^0 - \int_L V_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \gamma(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) - u_i^\infty(\mathbf{x}_0),$$
(23)

причому до них слід долучити рівняння рівноваги неоднорідності

$$\int_L p_i(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + P_i = 0,$$
(24)

$$\int_L \varepsilon_{ijm} x_j p_m(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + M_i = 0,$$
(25)

де P_i та M_i - відповідно головний вектор та головний момент зовнішніх сил, прикладених до ниткового включення.

3. Недеформівне прямолінійне ниткове включення

Розглянемо середовище, що містить прямолінійне недеформівне ниткове включення, що займає ділянку $-a < x_1 < a$ осі Ox_1 . Вважатимемо, що однорідний потік тепла h^0 спрямований уздовж осі Ox_1 середовища. У цьому випадку інтегральні рівняння (7), (10) теплопровідності та (23)-(25) термопружності набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{HFP} \int_{-a}^a \frac{\gamma(x_1)}{|x_1 - x_1^{(0)}|} dx_1 + \gamma(x_1^{(0)}) &= -4h^0 x_1^{(0)}, \\ \frac{1}{\pi} \text{HFP} \int_{-a}^a \frac{p_1(x_1)}{|x_1 - x_1^{(0)}|} dx_1 + p_1(x_1^{(0)}) &= \frac{2\mu\alpha h^0}{k_t} (x_1^{(0)})^2 - \\ &- \frac{(1+\nu)\mu\alpha}{2\pi(1-\nu)k_t} \int_{-a}^a \gamma(x_1) \text{sign}(x_1 - x_1^{(0)}) dx_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Тут HFP означає скінченну частину інтеграла за Адамаром (Hadamard Finite Part). З огляду на симетрію задачі, решта компонент вектора \mathbf{p} (тобто, p_2 та p_3) є нульовими.

Систему гіперсингулярних інтегральних рівнянь (26) розв'язуватимемо методом граничних елементів. Для цього лінію включення розіб'ємо на N рівних відрізків (граничних елементів). Вважатимемо функції $\gamma(x_1)$ та $p_1(x_1)$ сталими на кожному елементі (відповідно позначатимемо їх $\gamma^{(j)}$ та $p_1^{(j)}$). Точки колокації $x_1^{(j)} = a(-1 + (2j-1)/N)$ розташуємо посередині кожного елемента. У цьому випадку система рівнянь (26) зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N a_{ij} \gamma^{(j)} &= -4h^0 x_1^{(i)}, \\ \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N a_{ij} p_1^{(j)} &= \frac{2\mu\alpha h^0}{k_t} (x_1^{(i)})^2 - \frac{(1+\nu)\mu\alpha}{2\pi(1-\nu)k_t} \frac{2a}{N} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} \gamma^{(j)} + \sum_{j=i+1}^N \gamma^{(j)} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

де

$$a_{ij} = \begin{cases} \pi, & i = j \\ \ln \left| \frac{t_{ij} + 1}{t_{ij} - 1} \right|, & i \neq j, \end{cases} \quad (28)$$

а

$$t_{ij} = \left(x_1^{(i)} - x_1^{(j)} \right) \frac{N}{a}. \quad (29)$$

Тут $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, N$.

На рис. 3 зображено розподіли теплоти $\gamma(x_1)$ (рис. 3, а) та зусилля $p_1(x_1)$ (рис.3, б) уздовж осі ниткової неоднорідності.

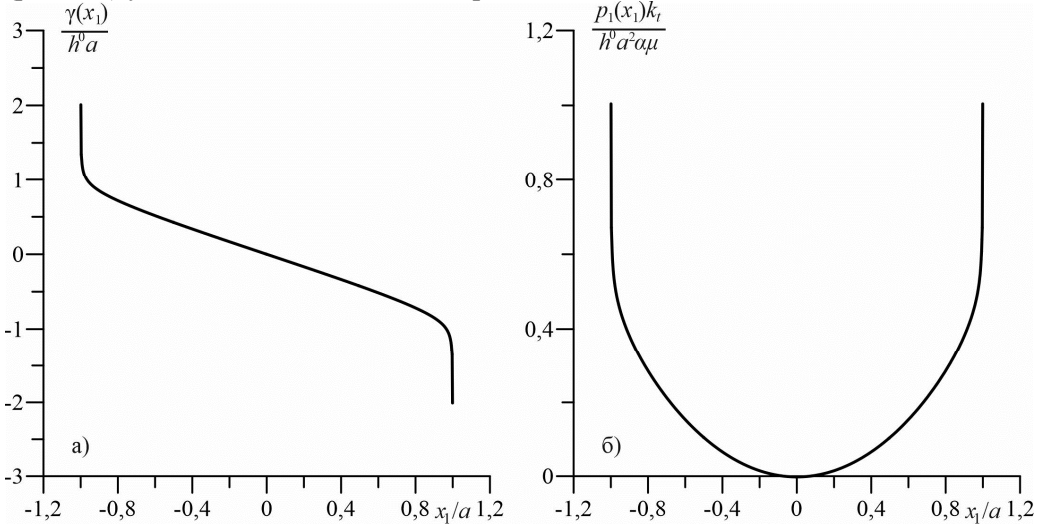


Рис. 3. Розподіл шуканих функцій уздовж осі ниткового включення

Видно, що розподіл теплоти $\gamma(x_1)$ є непарною функцією, а розподіл зусиль $p_1(x_1)$, навпаки, — парною, що цілком узгоджується із фізичними особливостями досліджуваного явища.

На рис. 4 зображено обчислений за формулою (6) розподіл нормованої температури $\theta k_l / (h^0 a)$ у середовищі із нитковим включенням.

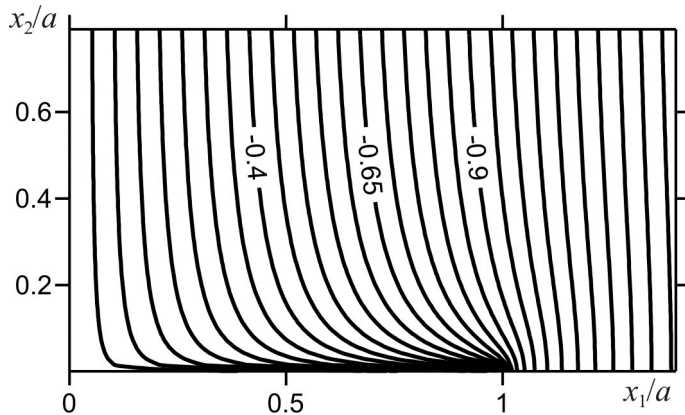


Рис. 4. Розподіл температури у середовищі із нитковим включенням

Видно, що ізотерми «огинають» ниткове включення, а її температура є нульовою. На кінці включення наявні істотні градієнти температури, що очевидно, зумовлено наявністю особливості, яку слід окремо дослідити.

Література

- [1] Wang H., Qin Q.-H., Kang Y.L. A new meshless method for steady-state heat conduction problems in anisotropic and inhomogeneous media // *Archive of Applied Mechanics*. — 2005. — 74. — P. 563–579.
- [2] Vales B., Cuartas V.M., Weleman H., Pastor M.-L., Trajin B. Heat source estimation in anisotropic materials // *Composite Structures*. — 2016. — 136. — P. 287–296.
- [3] Kushch V.I., Sevostianov I., Giraud A. Local fields and effective conductivity tensor of ellipsoidal particle composite with anisotropic constituents // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2017. — Volume 473, Issue 2207.
- [4] Balandin A.A., Ghosh S., Nika D.L., Pokatilov E.P. Extraordinary thermal conductivity of graphene: possible applications in thermal management // *ECS Trans*. — 2010. — Vol. 28, Issue 5. — P. 63–71.
- [5] Sulim G.T., Piskozub J.Z. Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions // *J. Eng. Math.* — 2008. — 61. — P. 315–337.
- [6] Pasternak Ia., Sulym H., Ilchuk N. Boundary element analysis of 3D shell-like rigid electrically conducting inclusions in anisotropic thermomagnetoelastic solids // *Z. Angew. Math. Mech.* — 2019. — e201800319. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800319>
- [7] Anufriev R., Nomura M. Coherent thermal conduction in silicon nanowires with periodic wings // *Nanomaterials*. — 2019. — 9, 142; doi:10.3390/nano9020142.
- [8] Im H., Hwang Y., Moon J.H., Lee S.H., Kim J. The thermal conductivity of Al(OH)₃ covered MWCNT/epoxy terminated dimethyl polysiloxane composite based on analytical Al(OH)₃ covered MWCNT // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. — 2013. — 54. — P. 159–165.
- [9] Pasternak Ia., Pasternak R., Pasternak V., Sulym H. Boundary element analysis of 3D cracks in anisotropic thermomagnetoelastic solids // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2017. — 74. — P. 70–78.

Thermoelasticity of isotropic solids containing non-deformable thread-like inclusions

Jaroslav Pasternak, Heorhiy Sulym, Nataliia Ilchuk

The paper derives integral equations of heat conduction and thermoelasticity of isotropic solids with non-deformable perfectly thermally conducting thread-like inclusions. It is observed that, in spite of the order of singularity, the integral equations obtained are hypersingular due to the symmetry of the kernels. Non-integral terms of these equations are derived. A boundary element method scheme for numerical solution of formulated problems is proposed. A numerical example is provided.

Отримано 11.12.18