УДК 622.279.23

Числова модель процесів масопереносу із застосуванням дробових похідних

Назарій Лопух

к. т. н., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: lopuh.nazar@gmail.com

У статті описано схему побудови та застосування методу скінченних елементів із використанням алгоритму Грюнвальда-Летнікова. Отримані результати дають можливість оцінювати вплив порядку дробової похідної за часом та простором на процес фільтрації газу в пористому середовищі. Проведений числовий екперимент та аналіз.

Ключові слова: фільтрація газу, дробові похідні, нестаціонарний процес, метод скінченних елементів.

Вступ. Процеси масопереносу в пористих середовищах часто володіють аномальною кінетикою протікання. Наявність в середовищі тріщин призводить до виникнення ефектів просторової нелокальності і, в ряді випадків, ефектів пам'яті, що підчиняються різним степеневим законам [1]. Математичним апаратом, що дозволяє адекватно описувати такі процеси, є теорія інтегро-диференціювання дробового порядку [4-5].

В даний час запропоновано досить велику кількість дробово-диференціальних моделей процесів переносу дифузійного типу [1-3]. Такі моделі успішно використовуються, зокрема, для опису процесів переносу домішок в геологічних формаціях зі складною і неоднорідною внутрішньою структурою [5]. Однак для опису фільтраційних процесів в складних неоднорідних пористих середовищах даний підхід ще не знайшов широкого застосування і більшість запропонованих на даний момент дробово-диференціальних моделей є лінійними. Разом з тим при фільтрації в таких середовищах часто спостерігаються нелінійні ефекти. Тому є актуальною проблема адаптації дробово-диференційного підходу для моделювання процесів фільтрації в пористих середовищах і побудова відповідних нелінійних математичних моделей фільтрації. Побудова таких моделей, зокрема, дасть можливість більш адекватно прогнозувати обсяги газовидобутку в пластах з природною тріщинуватістю.

1. Фільтрація газу в неоднорідному пористому середовищі

Розподіл тиску газу $p(x,y,z,t)$ в пласті описується нелінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2019, вип. 28, 29, 26-32

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial^{\beta} p}{\partial x^{\beta}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial^{\beta} p}{\partial y^{\beta}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial^{\beta} p}{\partial z^{\beta}}\right)=2mh\left(\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}\left(\frac{p}{\chi}\right)+2qp_{at}\right) \qquad (1)$$

Нехтуючи градієнтом тиску за вертикальною координатою, рівняння (1) запишеться:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^{2}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^{2}}{\partial y}\right)=2mh\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}\left(\frac{p}{\chi}\right)+4mhqp_{st}\,. \qquad (2)$$

Густина відбору визначається формулою

$$q=\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{I} q_i\left(x,y,z,t\right)\delta\left(x-x_i^0\right)\delta\left(y-y_i^0\right)\delta\left(z-z_i^0\right).$$

Відбір здійснюються через свердловин, які розміщені в точках (x_i^0, y_i^0, z_i^0) на протязі деякого проміжку часу $t\in[t_{1i}, t_{2i}]$, $(i=\overline{1,I})$.

Поступлення газу через границю Γ немає, тому при формулюванні задачі математичної фізики за граничну умову доцільно брати рівність нулю градієнта тиску по нормалі до границі, тобто $\frac{\partial p}{\partial n}=0$. За початкову точку відліку візьмемо кінець нейтрального періоду, початкове значення тиску p_0 вважаємо постійним. Γ — зовнішня границя області Ω; ν – зовнішня нормаль до області $\Omega\subset R^2$.

Процес фільтрації газу в неоднорідному пористиму середовищі описується рівнянням із дробовою похідною за часовою змінною та за просторовими координатами [4-6] за допомогоє степеневих параметрів:
$\alpha\in(0,2]$ — степінь дробової похідної за часом; $\beta\in(0,2]$ — степінь дробової похідної за просторовою координатою (для простоти вважаємо, що дробові коефіцієнти за всіма простороовими координатами є однаковими).

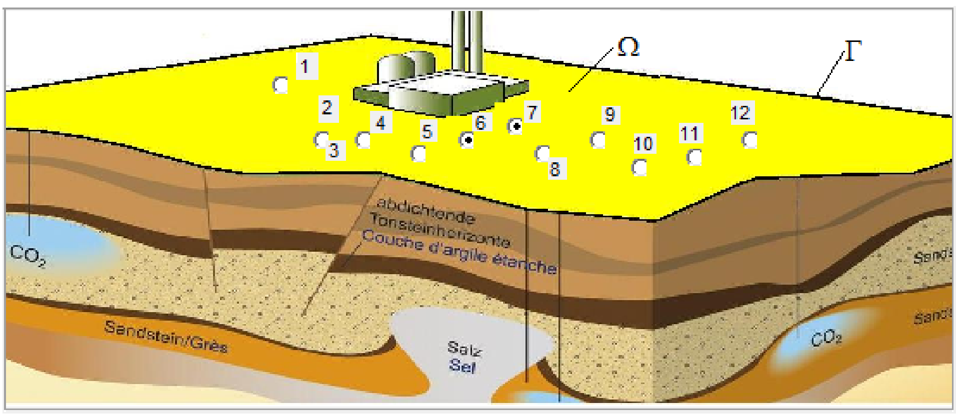

Рис. 1. Модель ПСГ

Знаходження розподілу тиску в неоднорідному пористому середовищі області Ω протягом всього нестаціонарного процесу є суттю даної задачі.

2. Числова модель

Числова модель задачі із дробовими похідними базується на скінченно-елементній схемі Грюнвальда-Летнікова в поєднанні з часовою ітераційною процедурою [3-6]. Двовимірна область (рис. 1) розбивається на елементарні елементи шляхом триангуляції.

Після процедури лінеаризації [6] рівняння (2) постане у такому вигляді:

$$\tilde{p}\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{\beta} p}{\partial x\beta}\right)+\tilde{p}\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{\beta} p}{\partial y^{\beta}}\right)=mh\frac{1}{\chi}\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}(p)+2mhqp_{st}+F(\tilde{p},k,h,\chi), \quad (3)$$

де $\tilde{p}$ — ітераційно наближене значення до p.

Дробові похідні $\dfrac{\partial^{\alpha} p}{\partial t^{\alpha}}$ та $\dfrac{\partial^{\beta} p}{\partial x^{\beta}}$ розкладемо за схемою Грюнвальда-Летнікова:

$${}^{GL}D_{\tau}^{\alpha} p := \lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-\alpha}\sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}p(\tau - j\Delta t), \quad (4)$$

Для часового диференційного доданка оператор Грюнвальда-Летнікова апроксимується на проміжку $[0,\tau]$ з підінтервальним кроком Δt як

$${}^{GL}D_{\tau}^{\alpha} p(\tau) \approx \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]} c_j^{(\alpha)} p(\tau - j\Delta t) \quad (5)$$

Для просторового диференційного доданка оператор Грюнвальда-Летнікова апроксимується на проміжках $[0, x_i]$ та $[0, y_i]$з підінтервальним кроком $\Delta x_i = \Delta y_i$ як

$${}^{GL}D_{\tau}^{\alpha} p(\tau) \approx \sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]} c_j^{(\alpha)} p(x - j\Delta x_i), \quad (6)$$

де $c_j^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}$. (7)

Використавши рекурентне співвідношення [5], знаходимо коефіцієнти $c_j^{(\alpha)}$

$$c_j^{(\alpha)} = (\Delta t)^{-\alpha}, \quad c_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) c_{j-1}^{(\alpha)}$$

Застосувавши дискретизаційну схему (5 - 6) зробимо перетворення

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} p(t) = \sum_{j=0}^{f} c_j^{(\alpha)} p(t_{f-j}) - \sum_{k=0}^{m} \frac{(t_f)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} p(t_k),$$

та аналогічно для просторових координат:

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} p(x) = \sum_{j=0}^{f} c_j^{(\beta)} p(x_{f-j}) - \sum_{k=0}^{m} \frac{(x_f)^{k-\beta}}{\Gamma(k-\beta+1)} p(x_k),$$

$$\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} p(y) = \sum_{j=0}^{f} c_j^{(\beta)} p(y_{f-j}) - \sum_{k=0}^{m} \frac{(y_f)^{k-\beta}}{\Gamma(k-\beta+1)} p(y_k).$$

Застосування ітераційної схеми для знаходження наближень $\tilde{p}$ та особливості побудови вихідної СЛАР із нав'язуванням граничних умов детальніше описано у праці [6]. В підсумку отримаємо

$$F\left(\tilde{p}, k, h, \chi\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kh}{\mu\chi} \cdot \tilde{p}\right) \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kh}{\mu\chi} \cdot \tilde{p}\right) \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}.$$

Тут
$$f = \left(-2mhp_{st}q + F(\tilde{p}, k, h, \chi) + \frac{mh}{\chi}\left(\sum_{j=1}^{i} c_j p(t_j - j\Delta t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} p_0\right)\right) \Big/ \tilde{p}.$$

3. Числовий експеримент

Для апробації числової схеми та дослідження ефекту дробових показників було розглянуто таку нестаціонарну задачу фільтрації газу в пористому середовищі. Площа пласту $S = 16\ млн\ м^2$, $q_i = 5\frac{м^3}{с}$, $(i = \overline{1,25})$. $\mu = 0.000011$ Па·с, $h = 20$ м, $R = 506.7\ Дж/кг\ {}^\circ К$, $T = 293\ {}^\circ К$, $\chi = 0.9$, $m = 0.3$, $k = 0.5 \cdot 10^{-13}\ м^2$. За початкові дані взяли пластовий тиск в центральній частині області $p_0 = 50$ атм та на границі $p_Г = 45$ атм.

Таблиця1

а	в	Ppl(атм)						
		t=0	t=30	t=60	t=90	t=120	t=150	t=180
1	1	51.55	47.66	43.79	38.89	33.82	29.30	29.17
0.99	1	51.55	47.66	43.79	38.89	33.82	29.30	29.17
1	0.99	51.55	47.74	43.92	38.95	33.80	29.29	29.12
0.99	0.99	51.55	47.74	43.92	38.95	33.80	29.29	29.12
0.98	1	51.55	47.66	43.79	38.89	33.82	29.30	29.17

В Таблиці 1 відображені значення середньопластових тисків для різних значень параметрів α і β протяном нестаціонарного процесу.

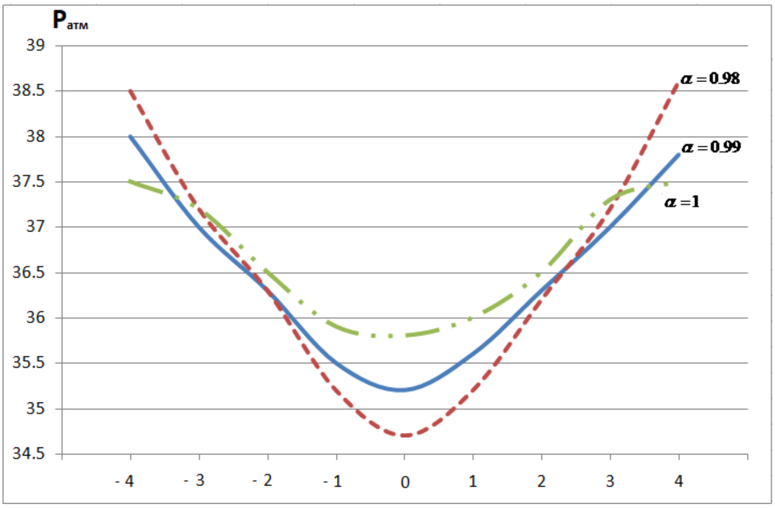

Рис.2
Розподіл тиску в околі свердловини (точка 0)
для різних значень параметра α

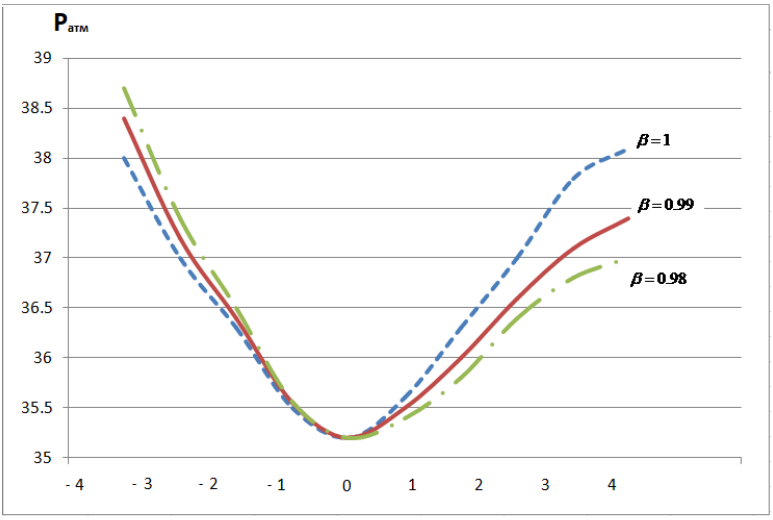

Рис.3
Розподіл тиску в околі свердловини (точка 0)
для різних значень параметра β

За результатами експерименту видно вплив параметра похідної за простором β на розподіл тиску газу в пласті та відсутність впливу параметра α на динаміку середньопластового тиску. Результати експерименту підтверджують характер поведінки тиску газу у пористому середовищі за наявності нетипової фільтрації.

Вданому числовому експерименті балансування маси газу забезпечується за рахунок коефіцієнта проникності газу k .

Отримані результати дають можливість оцінювати вплив порядку дробової похідної за часом та простором на процес фільтрації газу в пластах підземних сховищ.

Висновки. Використаний в роботі підхід до дробово-диференціальних фільтраційних моделей носить феноменологічний характер, тому можливість їх застосування в кожному конкретному практичному випадку повинна бути обґрунтована з використанням експериментальних даних, що підтверджують справедливість відповідних дробово-диференціальних узагальнень. Всі отримані в роботі моделі фільтрації відносяться до класу рівнянь аномальної дифузії. Характерною особливістю отриманих рівнянь, що відрізняє їх від відомих дробово-диференціальних моделей фільтрації, є їх нелінійність. При цьому моделі зберігають структуру класичних рівнянь фільтрації цілого порядку і переходять до них у граничних випадках, коли порядок дробового диференціювання стає цілим. Вивчення якісних властивостей отриманих рівнянь, а також побудова їх чисельних рішень є досить нетривіальними завданнями, які вимагають в кожному окремому випадку самостійного дослідження.

Література

[1] В.В.Васильев,Л.А.Симак. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание НАН Украины, — Киев, 2008 — 256 с.

[2] П’янило Я.Д. Числова модель пласта підземного сховища газу на основі методу скінченних елементів / Я.Д.П’янило, Н.Б.Лопух, П.П.Галій // Нафтова і газова промисловість. — 2011. — Вип.1. — С. 38-42.

[3] *Александров, А. В.* Проектирование и эксплуатация систем дальнего транспорта газа / *А. В. Александров, Е. И. Яковлев*. — Москва: Недра, 1974. — 432 с.

[4] R. Carmona & M. Ludkovski (2005), “Gas storage and supply guarantees: an optimal switching approach,” submitted to Management Science.

[5] Cook, Robert D., Concept and Applications of Finite Element Analysis, fourth edition, John Wiley & Sons, 2002.

[6] Lopuh N. B, Pyanylo Ya. D. Numerical analysis of models with fractional derivatives for gas filtration in porous media // Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics — 2014. — Vol. 2 (1). — Pp. 15-19.

Numerical model of mass transfer processes using fractional derivatives

Nazariy Lopuh

The article describes the scheme of construction and application of finite element method using Grunwald-Letnikov algorithm. Obtained results make it possible to estimate influence of fractional derivative order in terms of time and space on process of gas filtration in porous medium. Numerical ecperification and analysis performed.

Отримано 05.12.19