

## Оптимізація за напруженим станом режимів відпалу термочутливих скляних елементів конструкцій при нагріві конвективним способом і джерелами тепла

Олександр Гачкевич<sup>1</sup>, Микола Гачкевич<sup>2</sup>, Адріан Торський<sup>3</sup>

<sup>1</sup>д.ф.-м.н., проф., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів

<sup>2</sup>к.ф.-м.н., с.н.с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів

<sup>3</sup>к.т.н., н.с., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів

<sup>4</sup>д.ф.-м.н., проф., Політехніка Опольська, вул. Прушковска, 3, м. Ополь, 45036, Польща;

*Побудовано основу на числових методах локальних варіацій і найменших квадратах математичну модель і методику оптимізації відносно напруженого стану режимів відпалу термочутливих скляних елементів конструкцій з використанням нагріву конвективним способом і джерелами тепла. Як приклад досліджено оптимальні режими відпалу конкретних скляних пластин.*

**Ключові слова:** теплові режими у виробничих процесах, оптимізація відносно напруженого стану, термочутливі пластинчаті скляні елементи, відпал.

**Вступ.** Скляний елемент, в якому при виготовленні (з використанням зварювання, ситалоцементного з'єднання і т. п.) утворились залишкові температурні напруження (що можуть разом з експлуатаційними приводити до руйнування елемента) відпалюють з метою пониження рівня цих напружень за рахунок релаксації. При цьому елемент нагрівають від початкової температури до заданої (що повинна бути меншою від температури розм'якшення скла оскільки в протележному випадку можуть виникати більші за допустимі деформації елемента). З метою пониження рівня залишкових напружень шляхом релаксації елемент витримують певний час при заданій температурі, а потім поступово охолоджують до відомої кінцевої температури (температури виходу з нагрівача). Тривалість режиму відпалу залежить від рівня залишкових напружень, які виникли у виробі в процесі його виготовлення, а також від рівня виникаючих температурних напружень за відпалу. При відпалі скляного виробу величина допустимих напружень встановлюється для зони нагріву від початкової температури до температури відпалу (максимальної на інтервалі нагріву) і зони охолодження від цієї максимальної до температури виходу з нагрівача пристрою.

В роботі розглянуто методику моделювання та оптимізацію за рівнем напруженого стану режимів відпалу скляних елементів конструкцій (зокрема електровакуумних приладів) з метою пониження рівня залишкових напружень шляхом їх релаксації. При цьому за розрахунковий елемент вибрано елемент малої кривини, який моделюється вільною на краях (торцях) пластиною постійної товщини  $2h$ .

**Постановка задачі.** При побудові методики оптимізації режимів відпалу приймається, що відпал здійснюється за рахунок конвективного нагріву зовнішнім середовищем зі сторони основ модельного елемента (пластини) і джерелами тепла (які створюються сторонніми нагрівачами) на етапі нагріву від початкової температури до максимальної. При цьому за прийнятого способу нагріву на основах  $\gamma = \pm h$  пластини підтримується змінна в часі температура  $t^\pm(\tau)$ , тобто

$$t(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = t^\pm(\alpha_1, \alpha_2, \tau) \text{ при } \gamma = \pm h. \quad (1)$$

Тут  $t(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau)$  – температура, яка відраховується від початкової  $t_p$ ;  $\{\alpha_1, \alpha_2, \gamma\}$  – змішана ортогональна система координат, в якій  $\alpha_j, j = 1; 2$  – лінії головних кривин серединної поверхні пластини, а  $\gamma$  – нормаль до цієї поверхні (товщинна координата);  $\tau$  — час. Тоді температура в пластині задовільняє початковій умові

$$t(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, 0) = t_p. \quad (2)$$

Температурне поле в пластині описуємо неоднорідним рівнянням теплопровідності [1, 2, 3]

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} + p^2 t = -\frac{Q_*}{\lambda}. \quad (3)$$

В рівнянні  $Q_*(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau)$  — густина джерел тепла, що діють в пластині при її нагріві від початкової температури до максимальної;  $\lambda$  — коефіцієнт теплопровідності,  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$  — коефіцієнт температуропровідності,  $c$  — питома теплоємність,  $\rho$  — густина;  $p^2 = \Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau}$ ,  $\Delta$  – оператор Лапласа в

криволінійній системі координат [1, 2, 3], тобто

$$\Delta = \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right],$$

де  $A_1, A_2$  — коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні [1,2,3].

Для отримання наближеного розв'язку задачі теплопровідності (1)-(3), зручного для використання в числових алгоритмах оптимізації, апроксимуємо розподіл температури за товщиною координатою  $\gamma$  кубічним поліномом [3]

$$t(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) = \sum_{i=1}^m b_{i-1}(\alpha_1, \alpha_2, \tau) \gamma^{i-1}. \quad (4)$$

Функції  $b_{i-1}(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$  виразимо через усереднені характеристики температурного поля за товщиною оболонки [3]

$$T_p = \frac{2p-1}{2h^p} \int_{-h}^h t \gamma^{p-1} d\gamma, \quad p = \overline{1; m-1} \quad (5)$$

і задані граничні умови (1).

Рівняння для визначення усереднених характеристик  $T_p$  отримуємо, помноживши рівняння теплопровідності (3) на  $\gamma^{p-1}$  і проінтегрувавши по цій координаті з врахуванням співвідношень (5).

Обмежившись кубічним законом розподілу температури за товщиною координатою  $\gamma$  пластини для визначення усереднених характеристик температурного поля  $T_1, T_2$  приходимо до наступної системи диференціальних рівнянь [3]:

$$\begin{aligned} \left( \Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T_1 - \frac{3}{h^2} T_1 &= -W_1 - \frac{3}{2h^2} (t^+ + t^-), \\ \left( \Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T_2 - \frac{15}{h^2} T_2 &= -W_2 - \frac{15}{2h^2} (t^+ - t^-). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут

$$W = \lambda^{-1} Q_*(\alpha_j, \gamma, \tau), \quad W_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h W(\alpha_j, \gamma, \tau) d\gamma, \quad W_2 = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \gamma W(\alpha_j, \gamma, \tau) d\gamma$$

Невідомі коефіцієнти  $b_{i-1}$  апроксимуючого полінома (4) визначаємо з системи рівнянь, яку отримуємо безпосередньою підстановкою представлень (4) у відповідні межові умови (1) і співвідношення (5). Ці коефіцієнти мають наступний вигляд:

$$b_0 = \frac{3}{2} T - \frac{1}{4} (t^+ + t^-), \quad b_2 = -\frac{3}{2h^2} T_1 + \frac{3}{4h^2} (t^+ + t^-),$$

$$b_1 = \frac{5}{2h} T_2 - \frac{3}{4h} (t^+ - t^-), \quad b_3 = -\frac{5}{2h^3} T_2 + \frac{5}{4h^3} (t^+ - t^-). \quad (7)$$

Розглянемо випадок побудови ефективних режимів цільового симетричного нагріву з використанням однорідної температури зовнішнього середовища (яка залежить тільки від часу  $\tau$ ). В цьому випадку система диференціальних рівнянь (6) буде системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами, тобто:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{d\tau} + \frac{3a}{h^2} T_1 &= aW_1 + \frac{3a}{2h^2} (t^+ + t^-) \\ \frac{dT_2}{d\tau} + \frac{15a}{h^2} T_2 &= aW_2 + \frac{15a}{2h^2} (t^+ - t^-) \end{aligned} \quad (8)$$

Розв'язок такої системи знаходимо методом найменших квадратів [3, 4] при кінцево-елементній апроксимації функції  $t^+(\tau)$  (ефективнішим в порівнянні з різницевим відносно затрат машинного часу і оперативної пам'яті компютера). При цьому суттєво спрощується процедура числового визначення параметрів термонапруженого стану пластини (процедура отримання розв'язку прямої задачі), яка використовується в числовому алгоритмі оптимізації.

В даному випадку система диференціальних рівнянь (8) для визначення температури в операторному виді запишеться

$$Au = f, \quad (9)$$

$$\text{де } u = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} \frac{d}{d\tau} + \frac{3a}{h^2}; & 0 \\ 0; & \frac{d}{d\tau} + \frac{15a}{h^2} \end{Bmatrix} \text{ - відповідний диференціальний}$$

оператор,  $f_1 = aW_1 + \frac{3a}{2h^2} (t^+ + t^-)$ ,  $f_2 = aW_2 + \frac{15a}{2h^2} (t^+ - t^-)$  - праві частини системи (8).

Розіб'ємо проміжок нагріву  $[0, \tau_*]$  на  $p-1$  скінченний елемент за часом вузлами  $1, 2, 3, \dots, p$ . Шукані функції  $T_1, T_2$  представимо на проміжку  $[0, \tau_*]$  через функції форми і значення даних функцій в вузлах. Тоді на  $i$  — ому елементі будемо мати:

$$T_1(\tau) = G_1(\tau) T_1^i + G_2(\tau) T_1^{i+1}, \quad T_2(\tau) = G_1(\tau) T_2^i + G_2(\tau) T_2^{i+1}, \quad (10)$$

(де  $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$ ,  $T_1^i, T_2^i, T_1^{i+1}, T_2^{i+1}$  — значення функції  $T_1, T_2$  в точках  $\tau_i, \tau_{i+1}$ , а  $G_1(\tau), G_2(\tau)$  — функції форми) або в матричному вигляді

$$T_1 = [G_1 G_2] \begin{bmatrix} T_1^i \\ T_1^{i+1} \end{bmatrix}, \quad T_2 = [G_1 G_2] \begin{bmatrix} T_2^i \\ T_2^{i+1} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

За функцію форми вибираємо (за достатньої точності) поліном першої степені, що задовільняє таким умовам:

$$G_1(\tau_i) = 1, \quad G_1(\tau_{i+1}) = 0; \quad G_2(\tau_i) = 0, \quad G_1(\tau_{i+1}) = 1. \quad (12)$$

(вибір поліномів вищих степенів приводить до збільшення тривалості обчислень)  
 При цьому:

$$G_1(\tau) = \frac{\tau_{i+1} - \tau}{\tau_{i+1} - \tau_i} - \frac{\tau}{\tau_{i+1} - \tau_i}; \quad G_2(\tau) = -\frac{\tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} + \frac{\tau}{\tau_{i+1} - \tau_i}. \quad (13)$$

Нехай вектор  $q^{(i)}$  — сукупність значень шуканих функцій в вузлах  $i$  — го елемента, а  $\tilde{G}$  — матриця, елементами якої є функції форми. Тоді

$$u^{(i)} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & G_2 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^i \\ T_2^i \\ T_1^{i+1} \\ T_2^{i+1} \end{bmatrix} = \tilde{G} q^{(i)}. \quad (14)$$

Функціонал методу найменших квадратів для  $i$  — го елемента має вигляд

$$\begin{aligned} I^{(j)} &= \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left( A\hat{u}^{(i)} - f^{(i)} \right)^T \left( A\hat{u}^{(i)} - f^{(i)} \right) d\tau = \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left( \hat{u}^{(i)T} A^T \hat{u}^{(i)} - 2\hat{u}^{(i)T} A^T f^{(i)T} + f^{(i)T} f^{(i)} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (15)$$

де  $\hat{u}^{(i)}$  — елементна пробна функція [4], символом “Т” позначено транспоновані матриці,  $f^{(i)} = \tilde{G} \cdot r$ ,  $r = \left( f_{1,k}^{(i)}, f_{2,k}^{(i)}, \dots, f_{1,k}^{(i+1)}, f_{2,k}^{(i+1)}, \dots \right)$ ,  $\tilde{G}$  — матриця, елементами якої є базисні функції [4].

У відповідності до методу найменших квадратів визначимо  $\hat{u}^{(i)}$ , яке мінімізує функціонал, що отримується з (15), тобто

$$\tilde{I}^{(i)} = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left( q^{(i)T} \tilde{G}^T A^T A \tilde{G} q^{(i)} - 2q^{(i)T} \tilde{G}^T A^T \tilde{G} r \right) d\tau. \quad (16)$$

З умови мінімуму функціоналу  $\tilde{I}^{(i)}$  (за всіма параметрами  $q^{(i)}$ ) дістаємо наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial \tilde{I}^{(i)}}{\partial \{q^{(i)}\}} = \left\{ \frac{\partial \tilde{I}^{(i)}}{\partial T_1^{(i)}}, \frac{\partial \tilde{I}^{(i)}}{\partial T_2^{(i)}}, \dots, \frac{\partial \tilde{I}^{(i)}}{\partial T_2^{(i+1)}}, \dots \right\}^T \quad (17)$$

або

$$K^{(i)} q^{(i)} = S^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, p-1 \quad (18)$$

де

$$K^{(i)} = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \tilde{G}^T A^T A \tilde{G} d\tau, \quad S^{(i)} = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \tilde{G}^T A^T \tilde{G} d\tau \cdot r$$

Просумувавши (18) по всіх елементах отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{S\} \quad (19)$$

відносно невідомих значень функцій  $T_1, T_2$  в вузлах розбиття інтервалу  $0 \leq \tau \leq \tau_*$

точками  $\tau_i = i \frac{\tau_*}{p}$  на  $p$  рівних частин. Тут:

$$[K] = \sum_i K^i; \quad \{S\} = \sum_i S^i; \quad \{\delta\} = \sum_i q^{(i)}; \quad q^{(i)} = \left( T_1^i, T_2^i, T_1^{i+1}, T_2^{i+1} \right)^T. \quad (20)$$

Систему (19) розв'язуем методом Гаусса в модифікації Холесского. Маючи значення усередненої температури  $T_1^i$  і температурного моменту  $T_2^i$  з допомогою співвідношень (7), (4) обчислюємо температуру для будь-якого моменту часу  $\tau_i$  в довільній точці пластини.

Відзначимо також, що для досягнення тієї ж точності розв'язку за використання методу скінчених різниць необхідно значно згущувати розбиття за часом (що приводить до збільшення тривалості обчислень).

Вирази для елементів матриці  $K^i$ ,  $S^i$  (для  $i$  — го елемента) в розгорнутому вигляді запишуться:

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= \frac{1}{p} - 3q + 3q^2 p, & K_{12} &= 0, & K_{13} &= -\frac{1}{p} + \frac{3q^2}{2} p, & K_{14} &= 0, \\
 K_{21} &= 0, & K_{22} &= \frac{1}{p} - 15q + 75q^2 p, & K_{23} &= 0, & K_{24} &= -\frac{1}{p} + \frac{75q^2}{2} p, \\
 K_{31} &= -\frac{1}{p} + \frac{3q^2}{2} p, & K_{32} &= 0, & K_{33} &= \frac{1}{p} + 3q + 3q^2 p, & K_{34} &= 0, \\
 K_{41} &= 0, & K_{42} &= -\frac{1}{p} + \frac{75q^2}{2} p, & K_{43} &= 0, & K_{44} &= \frac{1}{p} + 15q + 75q^2 p,
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \left(-\frac{1}{2} + qp\right) f_1^{(i)} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}qp\right) f_1^{(i+1)}, \\
 S_2 &= \left(-\frac{1}{2} + 5qp\right) f_2^{(i)} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}qp\right) f_2^{(i+1)}, \\
 S_3 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}qp\right) f_1^{(i)} + \left(\frac{1}{2} + qp\right) f_1^{(i+1)}, \\
 S_4 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}qp\right) f_2^{(i)} + \left(\frac{1}{2} + 5qp\right) f_2^{(i+1)},
 \end{aligned}$$

де  $q = \frac{a}{h^2}$ ,  $p = \tau_{i+1} - \tau_i$ ,

Прийнявши до уваги умову (2) отримаємо такі початкові умови на функції  $T_1$ ,  $T_2$ :

$$T_1(0) = t_p, \quad T_2(0) = 0, \quad \frac{dT_1(0)}{d\tau} = 0, \quad \frac{dT_2(0)}{d\tau} = 0, \tag{22}$$

Температурні напруження у вільній від зовнішнього навантаження відносно коефіцієнта лінійного теплового розширення термочутливій пластині описуються за формулами приведеними в [2, 3], тобто

$$\sigma_1 = \sigma_2 \equiv \sigma = \frac{E}{1-\nu} (e_t - \Phi), \tag{23}$$

де  $E$  –модуль пружності;  $\Phi(t)$  – сумарна чисто теплова деформація, що визначається

співвідношенням  $\Phi(t) = \int_{t_0}^t \alpha_t(\xi) d\xi$ ;  $\alpha_t$  – коефіцієнт лінійного теплового

розширення;  $e_t = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \Phi(t) d\gamma$ ;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

З врахуванням викладеного вище вихідна задача оптимізації за напруженим станом режимів відпалу розглядуваного скляного елемента зводиться до побудови оптимальних за цим станом режимів відпалу вільної на орцях пластини, на поверхнях якої  $\gamma = \pm h$  відома температура  $t^\pm(\tau)$  при заданих обмеженнях на її зміну і відповідні температурні напруження  $\sigma^\pm$  при  $\gamma = \pm h$ . Сформулюємо таку задачу.

Пластину необхідно нагріти конвективним способом зі сторони зовнішньої поверхні і неперервно розподіленими джерелами тепла, які викликані зовнішньою дією (зокрема електромагнітним випромінюванням [3]) від сталої початкової температури  $t_p$  до максимальної  $t_0$  за час  $\tau_0$  на поверхні  $\gamma = h$ , підтримати цю температуру деякий проміжок часу  $\tau_B$ , а потім охолодити поверхню до кінцевої  $t_*$  ( $t_* \leq t_0$ ) за час  $\tau_*$  при певних обмеженнях на параметри термонапруженого стану і швидкість нагріву. Функцією керування є температура  $t^+(\tau) = t(h, \tau)$  зовнішньої поверхні пластини, яка є шуканою функцією і задовільняє у таким умовам:

$$t^+(0) = t_p; \quad t^+(\tau) = t_0 \quad \text{при} \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_{01}; \quad t^+(\tau_*) = t_*;$$

$$V_{T1} \leq \frac{dt^+(\tau)}{d\tau} \leq V_{T2}; \quad \left( \frac{dt^+(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_0} = 0; \quad \left( \frac{dt^+(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_{01}} = 0, \quad (24)$$

що відображають мету нагріву і специфіку термообробки скляних виробів [5], а також гладкість функції керування в певні моменти часу (умови, що дозволяють здійснювати практичну реалізацію оптимальних режимів). В (8)  $V_{T1}$ ,  $V_{T2}$  — задані допустимі швидкості нагріву.

Для забезпечення міцності розглядуваної пластини на всьому проміжку нагріву  $[0, \tau_*]$ , приймається, що параметри термонапруженого стану змінюються в заданих границях

$$\sigma_0^\pm \leq \sigma^\pm \leq \sigma_*^\pm, \quad (25)$$



де  $\sigma_0^\pm \leq 0$ ,  $\sigma_*^\pm \geq 0$ ,  $\sigma_0^\pm$ ,  $\sigma_*^\pm$  — задані значення допустимих напружень. Тут і надалі знаки “+”, “-” використовуються для позначення функцій і величин на зовнішній і внутрішній поверхнях пластини відповідно.

В якості критерію оптимальності приймемо функціонал максимальних нормальних напружень

$$N = \max \left\{ \sigma (\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \tau) \right\}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \gamma \in (V_0); \quad 0 \leq \tau \leq \tau_*, \quad (26)$$

де  $\tau_*$  — тривалість режиму термообробки,  $V_0$  — область в трьохмірному евклідовому просторі, що займає пластину.

Ставиться задача про знаходження функції керування  $f$ , яка забезпечує мінімум функціоналу (26) на множині функцій, що описують термонапружений стан пластини і задовольняють системі відповідних співвідношень термомеханіки та умовам закріплення поверхонь пластини (мінімаксна задача оптимізації).

Розв’язок сформульованої задачі будемо на основі принципу поетапної параметричної оптимізації [6], причому для реалізації етапу пошуку умовного мінімуму функціоналу (26) застосовуємо ітераційний метод локальних варіацій [7, 6], що базується на варіаціях в просторі станів функції керування при відомому розв’язку прямої задачі (що описує термонапружений стан пластини при заданих теплових і механічних межових умовах за відомих значень функції керування). Розв’язок прямої задачі будемо наступним чином: для заданого закону нагріву (при відомій температурі поверхні  $t^+(\tau)$ ) рівняння (8) розв’язуємо методом найменших квадратів при кінцево-елементній [4, 9]. апроксимації режиму нагріву по методиці описаній в [3, 10]. Для обчислення чисто теплової деформації  $\Phi^\pm$  і її усередненої характеристики  $e_t$  використовуємо методику описану в [3]. При відомих значеннях  $\Phi^\pm$ ,  $e_t$  знаходимо значення напружень на поверхні пластини за формулою (6).

Для запропонованого ітераційного алгоритму оптимізації важливим є вибір початкового наближення значень функції керування, що визначає збіжність ітераційного процесу. Початковими значеннями функції керування вибираємо визначані на основі розв’язку за методикою описаною в [1, 3] задачі оптимізації за напруженим станом режимів відпалу вільної на торцях однорідної пластини, на поверхнях  $\gamma = \pm h$  якої задана температура  $t^+(\tau)$ , при певних обмеженнях на її зміну і відповідні температурні напруження  $\sigma^+$  при  $\gamma = \pm h$ , а також при постійному коефіцієнті температурного розширення за умови оптимальності – мінімуму функціоналу пружної енергії.

При відомих оптимальній температурі  $t^+(\tau)$  поверхні  $\gamma = h$  і значеннях коефіцієнтів тепловіддачі, на основі крайових умов Ньютона встановлюється

відповідний цій температурі закон зміни температури зовнішнього середовища  $t^c$  (гріючої температури — функції керування). Тоді

$$t^c = 1/Bi * \partial t^+ / \partial \gamma \Big|_{\gamma=h} + t^+, \quad (27)$$

де  $Bi = h \cdot h_t$  – приведений коефіцієнт Біо,  $h_t$  – коефіцієнт тепловіддачі з зовнішньої поверхні

**Числовий приклад.** На основі запропонованої методики оптимізації визначено і проаналізовано оптимальний режим  $t^+$  відпалу (для симетричних умов нагріву однорідною температурою) і відповідні йому температурні напруження  $\sigma^+$  для пластини товщиною  $2h = 14$  мм, виготовленої із скла з наступними фізичними і механічними характеристиками:  $\alpha_t = 9,1 \cdot 10^{-6}$  1/град.;  $\rho = 2,26$  г/см<sup>3</sup>;  $\nu = 0,22$ ;  $\lambda = 3,9 \cdot 10^{-3}$  кал/(см·с·град.);  $C = 0,19$  кал/(г·град.);  $E = 6,4 \cdot 10^5$  кГ/см<sup>2</sup>. Максимальна температура нагріву (температура відпалу)  $t_0 = 480^\circ\text{C}$ . Температурна залежність коефіцієнта температурного розширення показана на рис.1 [11].

На рис. 2 проілюстровано оптимальну зміну в часі температури  $t^+$  і відповідних їй напружень  $\sigma^+$  на поверхні  $\gamma = +h$  пластини. Тривалість витримки при температурі відпалу 20 хв. ( $(\tau_{01} - \tau_0) = 20$  хв.) Час виходу на максимальну температуру складає  $\tau_0 = 29$  хв., а тривалість нагріву -  $\tau_1 = 117$  хв. Суцільними лініями показано оптимальну зміну в часі температури поверхні і відповідні їй змінні в часі напруження на поверхні пластини за відсутності джерел тепла. Видно, що при нагріві пластини від початкової температури до температури відпалу напруження стискаючі, а при охолодженні - розтягуючі. Режим нагріву побудований за наявності при охолодженні обмежень за двома рівнями розтягуючих напружень. Спочатку при охолодженні до температури кристалізації  $330^\circ\text{C}$  обмеження на розтягуючі температурні напруження пиймаються малими (порядку 1,7 МПа). Потім охолодження проходить до досягнення напруженнями на поверхні пластини другого рівня більшого допустимого значення (порядку 4 МПа)). Подальше охолодження при таких умовах продовжується до кінцевої температури виходу з нагрівача. Такий ступінчатий режим при високій тепературі початку охолодження не дозволяє утворитися більших за величиною кінцевих залишкових напружень і забезпечує виникнення менших значень залишкових напружень ніж за режиму, побудованому при допустимому (єдиному) значенні напружень.

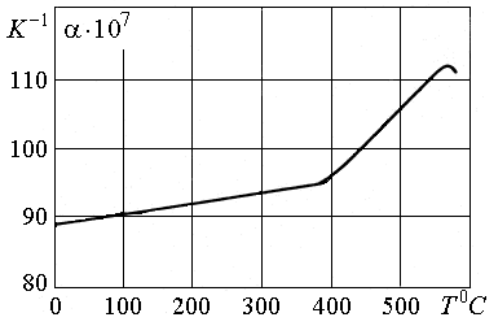


Рис.1

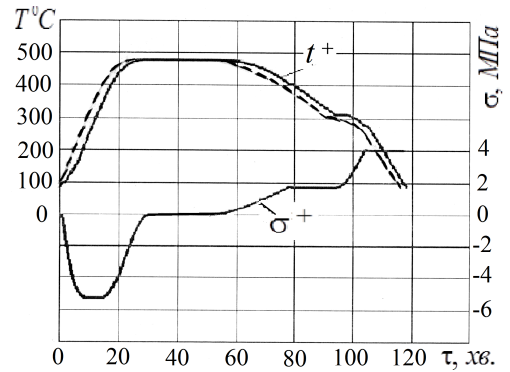


Рис.2

На рисунку штриховою лінією показано зміну оптимальної температури за додаткової дії постійних джерел тепла потужністю  $10^5 \text{ Вт/м}^3$  (при тих же допустимих температурних напруженнях на поверхні). Видно, що використання додаткового підігріву вказаними джерелами тепла в розглядуваному випадку дозволяє скоротити на 20% час виходу на максимальну температуру нагріву в порівнянні з режимом, при лише конвективному нагріві за тих же максимальній температурі нагріву і допустимих максимальних значеннях компонент тензора напружень. При цьому застосування двохступінчатої схеми вибору допустимих напружень при високій температурі охолодження практично не приводить до виникнення додаткових залишкових деформацій хоча тривалість процесу відпалу незначно збільшується в порівнянні з режимом охолодження за єдиного (наявного) значення допустимого напруження.

### Література

- [1] Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. — Киев: Наук. думка, 1979. — 364 с.
- [2] Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. — Киев: Наук. думка, 1981. — 344 с.
- [3] Гачкевич О. Р., Гачкевич М. Г., Будз С. Ф. Оптимізація за напруженим станом режимів нагріву скляних кусково-однорідних оболонок.—Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014–334с.
- [4] Норри Д., Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. — М.: Мир, 1981. — 304 с.
- [5] Будз С. Ф., Гачкевич Н. Г. Оптимизация термообработки кусочно-однородных оболочек ЭЛП с учетом температурной зависимости характеристик материала. // Физико-химическая механика материалов. — 1987. — № 5. — С. 111-113.
- [6] О. Гачкевич, Є Ірза, А. Козярьська. До методології оптимізації теплових режимів і напруженого стану в скляному виробництві. // Вісник донецького національного університету, Сер.А: Природничі науки, 2014, №1, с.22-28
- [7] Черноусько Ф. М., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука, 1973. — 225 с.
- [8] Гарт Э. Л., Гудрамович В., С. Проекционно-итерационная модификация метода локальных вариаций для задач с квадратичным функционалом. //Прикладная математика и механика, 2016, Т. 80, Вып. 2, С. 218-229

- [9] Brenner S. C., Scott L. R. The mathematical theory of finite element methods. Springer-Verlag, 1994.
- [10] Bozhenko B., Boychuk V., Hachkevych O., Hachkevych M., Kasperski Z. Method of optimization of heating treatment of glass-made piecewise-homogeneous shells of revolution with allowance for the temperature sensitivity of allowable stresses. Advances in the Mechanics of in homogeneous media (Ed. by Cz. Woźniak, M. Kuczma, R. Świtka, K. Wilmański), part 2, Coupled fields, chap. 13, Zielona Góra: UZGP, 2010. –pp. 201-222.
- [11] Барановский В. И., Гусев В. Н., Иванов В. Н. и др. Производство цветных кинескопов. / Под ред. В.И. Барановского. — М.: Энергия, 1978. — 368 с.

## **Optimization by the influenced status of the volume of thermscreated glass elements of constructions at heating by convective method and heat sources**

Olexandr Hachkevych<sup>1</sup>, Mykola Hachkevych<sup>2</sup>, Adrian Torsky<sup>3</sup>

*The technique of optimization of the annealing modes of heat-sensitive glass elements is proposed for heating by convective method and heat sources*

Отримано 13.01.2019